

Tema: Estruturas Metálicas e Mistas / Construções Leves estruturadas em Aço

## AVALIAÇÃO DE MÉTODOS NUMÉRICOS DE ANÁLISE LINEAR DE ESTABILIDADE PARA PERFIS DE AÇO FORMADOS A FRIO\*

Débora Coting Braga<sup>1</sup>  
Eduardo M. B. Campello<sup>2</sup>

### Resumo

Este trabalho avalia três metodologias para a análise linear de estabilidade de perfis formados a frio isolados. Especificamente, estudam-se perfis de seção U enrijecido (i) biarticulados, sem restrição ao empenamento nas extremidades e submetidos a compressão uniforme e (ii) engastados em uma extremidade, livre na outra e submetidos a flexão simples. Determinam-se os carregamentos críticos para os modos de instabilidade globais e locais por meio de análises numéricas: (i) com o Método das Faixas Finitas (MFF), via uso do programa computacional CUFMS; (ii) com elementos finitos de barra baseados na Teoria Generalizada de Vigas (MEF-GBT), via uso do programa GBTUL; e (iii) com elementos finitos de casca (MEF-cascas) via uso do programa ABAQUS. Algumas restrições e ressalvas com relação ao uso do MFF são apresentadas, assim como limitações da Teoria Generalizada de Viga e cuidados a serem tomados nos modelos de cascas. Analisa-se também a influência do grau de discretização da seção transversal.

**Palavras-chave:** Análise linear de estabilidade, Perfis formados a frio, Método das faixas finitas, Teoria generalizada de viga, Método dos elementos finitos.

### EVALUATION OF NUMERICAL METHODS FOR LINEAR STABILITY ANALYSIS

#### Abstract

*This work evaluates three methods for linear stability analysis of isolated cold-formed members. Specifically, it was studied Ue section members (i) simply supported, without warping restraint at the ends and subjected to uniform compression and (ii) with one end fixed and the other end free and subjected to flexure. The elastic critical loads and uncoupled buckling modes are determined by means of numerical analyses: (i) with the Finite Strip Method (FSM), using computer program CUFMS, (ii) with beam finite element based on the Generalized Beam Theory (FEM-GBT), using GBTUL program, and (iii) with shell finite elements (FEM-shell) using ABAQUS program. Some restrictions and warnings regarding the use of the FSM are then presented, as well as limitations for the application of the Generalized Beam Theory and some precautions to be taken when using FE shell models. It is also analyzed the influence of the discretization on the cross section.*

**Keywords:** *Linear stability analysis, Cold formed members, Finite strip method, Generalized beam theory, Finite element method.*

<sup>1</sup> Mestranda, Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica, Escola Politécnica da USP, São Paulo, SP – Brasil.

<sup>2</sup> Professor Doutor, Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica, Escola Politécnica da USP, São Paulo, SP – Brasil.

\* Contribuição técnica ao **Construmetal 2014** – Congresso Latino-Americano da Construção Metálica – 02 a 04 de setembro de 2014, São Paulo, SP, Brasil.



## 1 INTRODUÇÃO

Os perfis de aço formados a frio, ou perfis de chapa dobrada, têm sido amplamente empregados em vários segmentos da construção civil. O bom padrão construtivo, a facilidade de fabricação, a economia no manuseio e na montagem, aliados à sua enorme versatilidade, contribuíram para a difusão desses perfis [1]. Sua utilização tem sido também motivada por se tratar de perfis leves, esbeltos e com elevada eficiência estrutural, o que ao mesmo tempo acarreta complicações: a perda de estabilidade passa a ser um aspecto importante no projeto.

Os fenômenos de instabilidade manifestam-se repentina e violentamente, mesmo quando a velocidade de crescimento das intensidades das ações não sofre acréscimos bruscos. Assim sendo, pode-se dizer que as ruínas produzidas por instabilidade são sem aviso e quase sempre produzem grandes danos à estrutura [2]. Nesse contexto, o projeto de uma estrutura ou de um elemento estrutural não pode basear-se unicamente em conceitos de segurança relacionados à sua resistência e à sua deformabilidade; é indispensável também a consideração da estabilidade de seu equilíbrio [3].

A palavra “estabilidade” está associada ao equilíbrio de um sistema e pode ser utilizada em diversos contextos. No âmbito da engenharia de estruturas, estabilidade é a tendência de um sistema equilibrado permanecer próximo à sua configuração original quando pequenas perturbações encorajam o sistema a abandoná-la. Diz-se que uma configuração do sistema é de *equilíbrio estável* em qualquer instante de tempo se pequenas perturbações nos parâmetros do sistema ou nas condições externas provocam pequenas alterações na configuração original [4].

Faz-se necessária também a definição de *carregamento crítico*,  $P_{cr}$ , que é o carregamento (seja ele uma força, um conjunto de forças ou momentos) correspondente a um *ponto crítico*, *i.e.*, a um ponto da trajetória de equilíbrio em que a estrutura pode se tornar instável. Um *ponto crítico* por sua vez pode ser de dois tipos: (i) estático, podendo ser classificado como ponto de bifurcação ou ponto limite (ambos caracterizam a perda de estabilidade através de uma mudança brusca do sistema, sendo esse fenômeno conhecido como “*buckling*” na língua inglesa); ou (ii) dinâmico, caracterizado por movimentos oscilatórios.

A instabilidade elástica bifurcacional (entende-se por instabilidade elástica aquela que se processa com o material trabalhando em seu regime elástico) é um dos tipos mais comuns de perda de estabilidade e objeto de estudo desde o século XVIII. Um dos primeiros estudos de problemas de bifurcação foi apresentado para barras isoladas comprimidas em 1744, pelo matemático suíço Leonard Euler [5]. Em um determinado estágio de carregamento, a configuração de equilíbrio da barra tem a tendência a se aproximar de um ponto de divergência, ou ponto de bifurcação, a partir do qual duas trajetórias de equilíbrio passam a ser possíveis. O ponto de bifurcação está localizado na intersecção dessas duas trajetórias e denota uma possível alteração no comportamento do sistema uma vez que a partir de tal

ponto o mesmo pode seguir dois estados de equilíbrio distintos, conforme ilustrado na Figura 1.1. Adiante do ponto de bifurcação, o sistema pode: (i) permanecer ao longo da sua trajetória original de equilíbrio, a chamada trajetória primária ou trajetória fundamental (correspondente à forma retilínea da barra), ou (ii) divergir da sua trajetória original e seguir uma nova trajetória, nomeada de trajetória secundária (correspondente a uma forma em que adquire curvatura), sendo a primeira alternativa instável e a segunda estável.

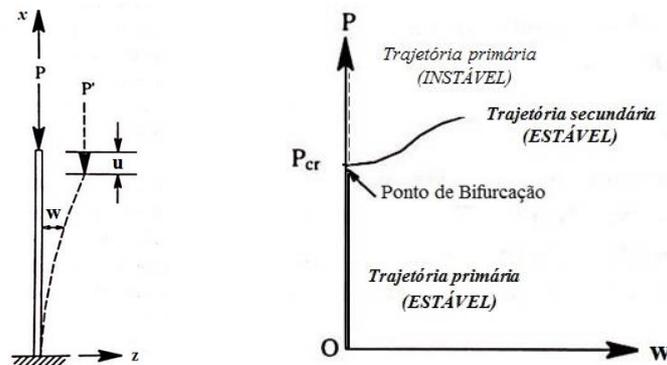


Figura 1.1 –Instabilidade bifurcacional de uma barra comprimida. Adaptado de [6].

A instabilidade de perfis de aço formados a frio está contextualizada na instabilidade estática bifurcacional simétrica estável, denominada *flambagem*, que é apenas uma das três classificações da instabilidade bifurcacional.

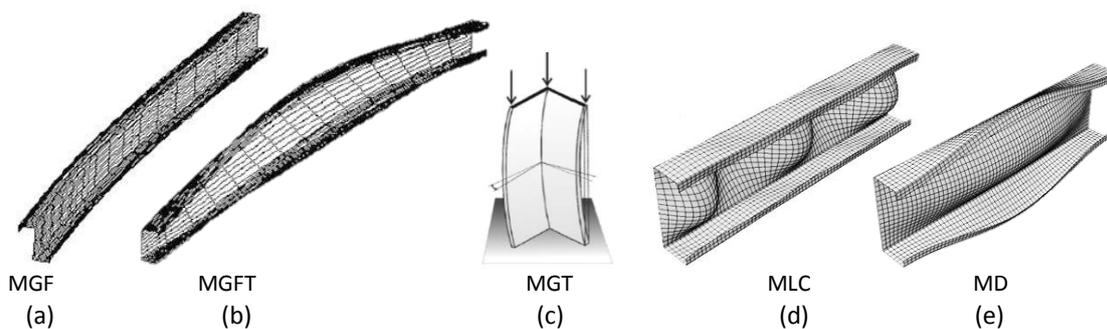


Figura 1.2 –Modos de instabilidade classificados em:(a) modo global por flexão, (b) modo global por flexotorção, (c) modo global por torção, (d) modo local de chapa e (e) modo distorcional.

Os fenômenos de instabilidade são comumente caracterizados como de natureza global ou local. Os modos de instabilidade globais em barras comprimidas são caracterizados por não envolverem deformação significativa das seções transversais em seu plano, provocando nas seções deslocamentos quase que exclusivamente de corpo rígido. Costumam ser classificado em: (i) modo global por flexão (MGF), ilustrado na Figura 1.2a, que ocorre em barras com seções duplamente simétricas ou com simetria em relação a um ponto; (ii) modo global por flexotorção (MGFT), ilustrado na Figura 1.2b, que ocorre em barras com seções com um ou nenhum eixo de simetria; e (iii) modo global por torção, ilustrado na Figura 1.2c, que ocorre em barras curtas com seção duplamente simétrica e de baixa rigidez à torção.



Já os modos de instabilidade local são aqueles que não envolvem deslocamentos significativos do eixo da barra, mas que induzem deformações localizadas nas seções transversais, permanecendo o seu eixo praticamente reto. Os modos locais são convencionalmente divididos em modo local de chapa (MLC) e modo distorcional (MD), como ilustra a Figura 1.2d e Figura 1.2e respectivamente. Por definição, modo local de chapa caracteriza-se pela conservação da posição original dos cantos dobrados da seção – os quais permanecem definindo uma linha reta paralela ao eixo do perfil – apresentando somente deslocamentos de flexão das paredes que constituem o perfil, enquanto que o modo distorcional caracteriza-se pela rotação e possível translação do conjunto formado pela(s) mesa(s) comprimida(s) e seu(s) enrijecedor(es) de borda, com grandes mudanças na forma da seção transversal (cantos dobrados da seção podem mudar de posição).

Dentro do contexto da análise linear de estabilidade, neste trabalho pretende-se avaliar três diferentes métodos numéricos de obtenção de carregamentos críticos elásticos bifurcacionais e seus correspondentes modos de instabilidade, quando aplicados a perfis de aço de chapa dobrada de seção U enrijecido (comercialmente denominados “Ue”). Em cada método, analisa-se também a influência do grau de discretização da seção transversal.

## 2 MATERIAIS E MÉTODOS

Os métodos numéricos de análise linear de estabilidade são aqueles que fornecem os carregamentos críticos elásticos, ou que, formalmente, consistem na resolução de um problema de autovalores e autovetores associado às matrizes de rigidez elástica e geométrica da estrutura discretizada (qualquer que seja o método de discretização empregado). As três metodologias de discretização mais consagradas para uso em estruturas de aço são apresentadas na sequência.

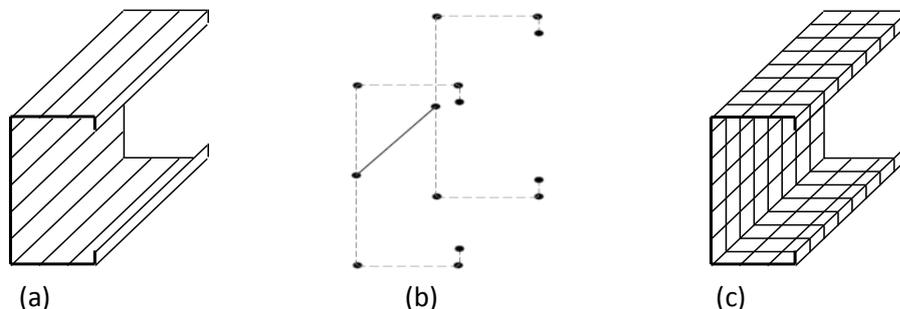


Figura 2.1 – Discretização de um perfil utilizando (a) MFF, (b) MEF-GBT e (c) MEF-cascas

O Método das Faixas Finitas (MFF) tira proveito da natureza prismática dos perfis e discretiza a seção transversal em finitos segmentos, sendo que cada segmento dá origem a uma faixa com uma dimensão longitudinal igual à do comprimento total do perfil conforme a Figura 2.1a. Cada faixa finita é representada por quatro nós, tendo cada nó quatro graus de liberdade. O campo de deslocamentos é obtido por interpolação dos deslocamentos nodais através de



funções de forma  $\Psi$ . As funções de forma longitudinais devem ser escolhidas de acordo com as condições de contorno do problema. No caso de um perfil biarticulado, é possível fazer  $\Psi(y) = \text{sen}(m\pi y/L)$  ( $y$ =coordenada ao longo do eixo), sendo que a constante “ $m$ ” denota o número de semiondas longitudinais esperadas para a configuração deformada ao longo do comprimento da faixa (“ $m$ ” é um número que deve ser assumido a priori, normalmente adota-se  $m=1$ ).

A Teoria Generalizada de Vigas (MEF-GBT), denominada GBT (*Generalized Beam Theory*) foi desenvolvida por Richard Schardt em 1966 na Alemanha [7]. A GBT apresenta uma formulação baseada numa teoria de vigas, isto é, ela idealiza o perfil como sendo um objeto unidimensional representado por sua linha de eixo, dotado de uma seção transversal. O eixo pode experimentar deslocamentos e rotações de magnitude moderada e a descrição cinemática é enriquecida com a inclusão de graus de liberdade adicionais pertencentes às seções transversais (e não apenas ao eixo). Em outras palavras, introduzem-se nós nas seções transversais, o que permite a consideração dos efeitos locais, i.e. das deformações da seção, conforme a Figura 2.1b. O método dos elementos finitos com elementos de barra (i.e. elementos unidimensionais) é então utilizado para solução numérica das equações correspondentes.

Por fim, há a discretização por meio de elementos finitos de casca (MEF-cascas), que é o método numérico mais geral, versátil e popular. O método consiste em discretizar a geometria do perfil utilizando elementos de casca, conforme a Figura 2.1c. Com esses elementos, os deslocamentos e as rotações em um ponto qualquer do perfil são aproximados por funções de forma polinomiais cujos coeficientes são os deslocamentos generalizados ou, em outras palavras, os graus de liberdade nodais. A necessidade de capturar adequadamente as deformações da seção transversal nos vários modos de instabilidade (cujas formas são inicialmente desconhecidas) faz com que a discretização se dê com o uso de malhas refinadas.

Os três métodos utilizam métodos variacionais para a formulação do problema de autovalores, que compreende em resolver o seguinte problema generalizado de autovalores:

$$(\mathbf{K}_e - \lambda \mathbf{K}_g)\boldsymbol{\phi} = 0 \quad (1.1)$$

Na Eq.(1.1),  $\mathbf{K}_e$  é a matriz de rigidez elástica do modelo e é função das propriedades do material e das funções de forma escolhidas, que por sua vez, dependem do método de discretização empregado.  $\mathbf{K}_g$  é a matriz de rigidez geométrica do modelo, sendo função das funções de forma e dos carregamentos aplicados. Existe um fator  $\lambda$  multiplicativo dos parâmetros livres de  $\mathbf{K}_g$ , que é a incógnita do problema tal que exista solução não trivial para a equação acima. As  $n$  raízes da Eq. (1.1) são denominadas de *autovalores* e a cada raiz  $\lambda$  há um vetor  $\boldsymbol{\phi}$ , não nulo, correspondente que satisfaz a Eq. (1.1). A menor das raízes no contexto da instabilidade bifurcacional está associada ao primeiro ponto crítico, conseqüentemente ao carregamento crítico mínimo.



A confiabilidade dos resultados obtidos depende de o quão o método de discretização consegue reproduzir as reais condições de contorno nas extremidades do perfil, além do nível de discretização da seção transversal e da “qualidade” das funções de forma que originam as matrizes de rigidez elástica e geométrica.

Para a utilização os três métodos, respectivamente, os seguintes programas computacionais são utilizados neste trabalho: (i) CUFSM [8], desenvolvido na Universidade Johns Hopkins de Baltimore, Estados Unidos; (ii) GBTUL [9], desenvolvido na Universidade Técnica de Lisboa; e (iii) ABAQUS [10], comercializado pela *Dassault Systemes Simulia Corporation*.

O CUFSM é um programa que utiliza o Método das Faixas Finitas (MFF) para calcular os carregamentos críticos elásticos de um perfil isolado de seção transversal definida, tendo diferentes comprimentos. O programa fornece o modo e o carregamento crítico correspondente para diferentes comprimentos arbitrários do perfil. O CUFSM convencional – no presente trabalho denominado apenas como CUFSM–, apesar de ser uma alternativa de baixo custo computacional em relação ao MEF, apresenta algumas restrições: (i) as barras devem ser obrigatoriamente prismáticas; (ii) o método só permite barras isoladas; (iii) não há restrição ao empenamento; e (iv) por haver nós somente nas seções das extremidades, o carregamento tem que ser obrigatoriamente uniforme ao longo da barra.

Implementações recentes possibilitaram o desenvolvimento do Método das Faixas Finitas Confinadas (*Constrained Finite Strip Method*), denominado cFSM [11]. Através de ideias semelhantes às da teoria generalizada de viga (a qual será abordada no próximo parágrafo), o método possibilitou a identificação e decomposição dos modos elásticos de instabilidade. As versões CUFSM 3.12 (e em diante) do programa contêm tanto o método convencional quanto o método modificado. Por criar nós intermediários ao longo do eixo longitudinal, o cFSM faz uso de uma discretização mais rica ao longo do eixo do perfil. Quando a curva gerada pelo CUFSM convencional (fator de carregamento versus comprimento da barra) não é capaz de fornecer mínimos distintos que correspondam aos modos de instabilidade local e distorcional, o cFSM torna-se essencial para a determinação desses modos.

O GBTUL, por sua vez, é um programa que tem a Teoria Generalizada de Vigas (MEF-GBT) implementada. O programa trata de forma analítica as barras simplesmente apoiadas e de forma numérica (elementos finitos) barras com outras condições de vinculação. Como resposta nas análises de estabilidade, o GBTUL exhibe os modos de instabilidade e os correspondentes carregamentos críticos para diversos comprimentos do perfil (o comprimento é admitido como uma variável livre: apenas as dimensões da seção transversal são fixas e fornecidas nos dados de entrada), semelhantemente ao CUFSM.

Já nas análises com elementos de casca via Método dos Elementos Finitos (MEF) através do programa computacional ABAQUS, diferentemente daquelas com o uso do CUFSM e do GBTUL, o comprimento do perfil precisa ser definido previamente (é um dado fixo do problema). A



introdução dos carregamentos e das condições de contorno nos nós das seções transversais extremas precisa ser feita com muito critério, a fim de se representar adequadamente a solitação externa e a condição de vínculo que se deseja. Esse aspecto parece um tanto óbvio e, no entanto, é aqui onde muitos modelos incorrem em erro e fornecem resultados completamente inesperados ou sem representatividade do problema em apreço.

### 3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Este capítulo é dedicado à obtenção dos carregamentos críticos elásticos bifurcacionais e seus correspondentes modos de instabilidade, através do (i) MFF, (ii) MEF-GBT e (iii) MEF-cascas, quando aplicados à análise de perfis de chapa dobrada de seção U enrijecido 200x75x20x2 ilustrado na Figura 3.1a, para as seguintes condições de carregamento e vinculação: (i) barra isolada biarticulada sem restrição ao empenamento, submetida à compressão uniforme e (ii) barra isolada engastada em uma extremidade e livre na outra, submetida à flexão simples.

Em cada caso, analisa-se também a influência do grau de discretização da seção transversal, conforme apresentado na Figura 3.1b, Figura 3.1c e Figura 3.1d.

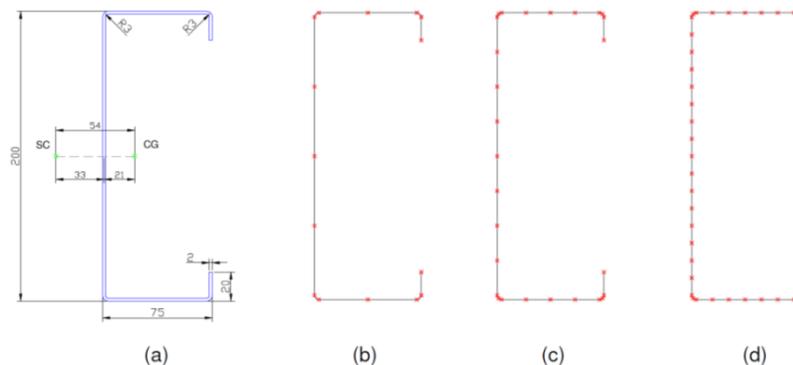


Figura 3.1 – Seção Ue200x75x20x2 e sua discretização. (a) dimensões nominais em mm, (b) malha tipo 1, (c) malha tipo 2 e (d) malha tipo 3.

#### 3.1 Barra biarticulada submetida à compressão uniforme

Nesse item, o perfil biarticulado, sem restrição ao empenamento em ambas as extremidades e submetido à compressão uniforme, conforme ilustrado na Figura 3.2, é analisado.

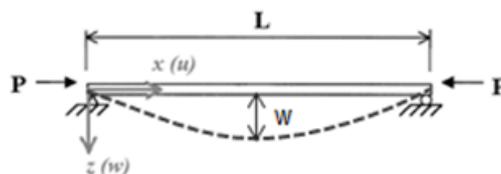


Figura 3.2 – Barra isolada de comprimento  $L$ , biarticulada e submetida ao carregamento  $P$ .

Utilizaram-se três diferentes discretizações da seção transversal, conforme ilustrado na Figura 3.1, nomeadas de tipo 1, tipo 2 e tipo 3, sendo 1 a seção menos refinada e 3 a seção mais refinada.

### 3.1.1 Análise com o Método das faixas finitas

A Figura 3.3 apresenta a curva obtida com o uso do CUSFM, onde na abscissa tem-se o comprimento do perfil em milímetros (escala logarítmica) e na ordenada tem-se o fator de carregamento,  $p$ , que é a relação entre o carregamento aplicado (para este caso o carregamento é unitário) e o carregamento crítico. Os seis pontos marcados representam os perfis de comprimentos destacados na Figura 3.4 abaixo, cujos modos de instabilidade são apresentados. Nota-se que os casos de comprimentos 15 cm e 70 cm correspondem a pontos de mínimo locais na curva da Figura 3.3. Os carregamentos críticos obtidos com os três graus de refinamento da seção transversal estão apresentados na Tabela 3.1.

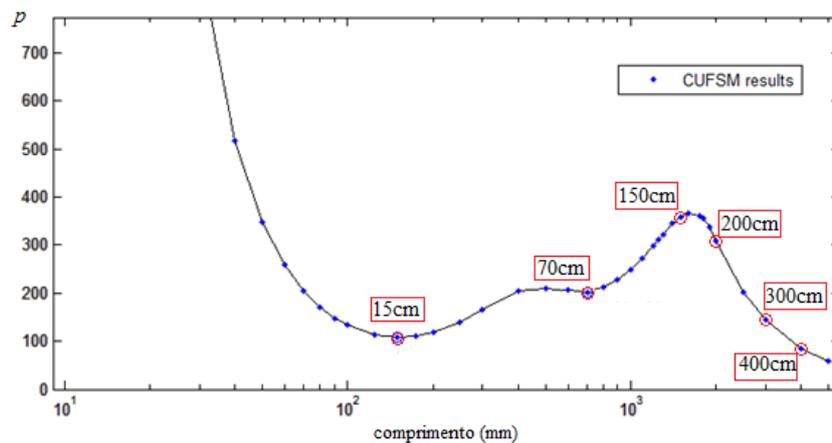


Figura 3.3 – Determinação da curva comprimento do perfil (mm) vs. fator de carregamento,  $p$ , com o CUSFM.

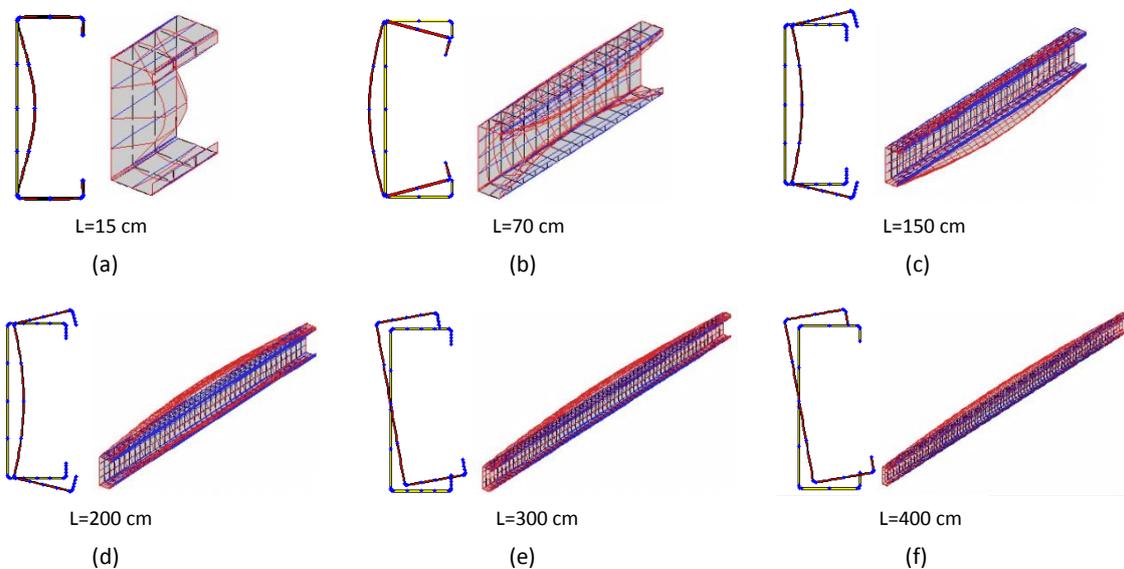


Figura 3.4 – Modos de instabilidade obtidos com o CUSFM para a discretização tipo 1 da seção transversal para comprimento de (a) 15 cm, (b) 70 cm, (c) 150 cm, (d) 200 cm, (e) 300 cm e (f) 400 cm.

Tabela 3.1. Valores dos carregamentos críticos (kN) obtidos com o CUFSM para os graus de refinamento (Gr) tipo 1, 2 e 3 da seção transversal.

Gr.	L (cm)					
	15,0	70,0	150,0	200,0	300,0	400,0
1	82,15	155,58	271,73	232,84	109,06	64,84
2	82,08	155,34	271,25	231,54	108,48	64,51
3	82,07	154,36	271,04	231,19	108,32	64,43

Convém destacar que para os comprimentos 70 cm, 150 cm e 200 cm o CUFSM fornece como resultado um modo de instabilidade distorcional (MD) e para os comprimentos de 300 cm e 400 cm o resultado é um modo global de flexotorção (MGFT). Utilizando a formulação do Método das Faixas Finitas Confinadas através do programa do cFSM, contudo, obtêm-se resultados diferentes para os comprimentos de 70 a 300 cm: o carregamento crítico passa a ser aproximadamente  $P_{cr}=82\text{kN}$  para todos os comprimentos indicados na figura abaixo e todos correspondem a um modo local de chapa (MLC) com mais de uma semionda longitudinal, conforme ilustrado na Figura 3.5.

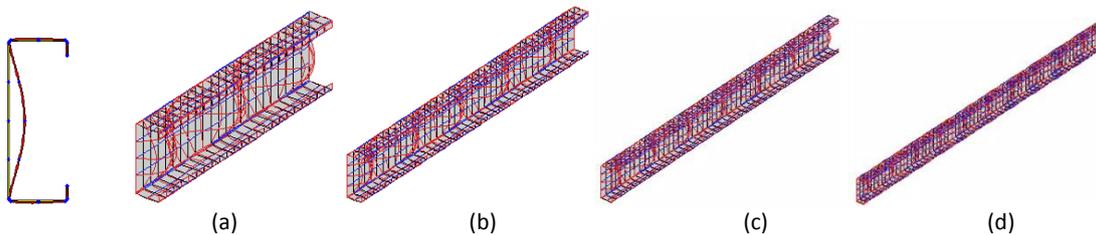


Figura 3.5 – Modo de instabilidade local de chapa obtido via cFSM, para comprimentos de (a) 70 cm, (b) 150 cm, (c) 200 cm e (d) 300 cm.

### 3.1.2 Análise com a teoria generalizada de viga

A Figura 3.6 apresenta a curva obtida com o uso do programa computacional GBTUL, onde no eixo das abscissas tem-se o comprimento da barra em centímetros (escala logarítmica) e no eixo das ordenadas o carregamento crítico em kN. Os pontos destacados em vermelho representam as barras cujos comprimentos são 15 cm, 70 cm, 200 cm, 300 cm e 400 cm. Os modos de instabilidade referentes aos pontos destacados estão apresentados na Figura 3.7, enquanto que os carregamentos críticos para os três graus de refinamento estão apresentados na Tabela 3.2.

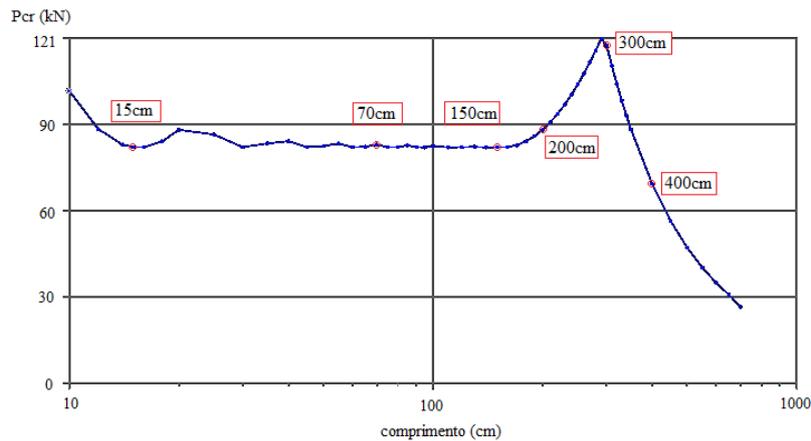


Figura 3.6 – Determinação da curva comprimento (cm) vs. carga crítica, Pcr (kN) com o GBTUL.

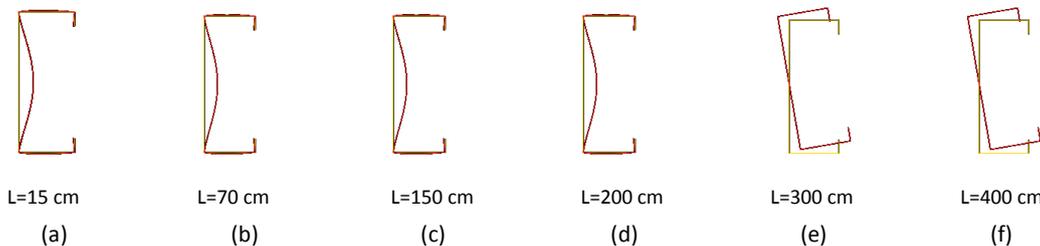


Figura 3.7 – Seção transversal no meio do vão obtida com o GBTUL para os modos de instabilidade de comprimento igual a: (a) 15 cm, (b) 70 cm, (c) 150 cm, (d) 200 cm, (e) 300 cm e (f) 400 cm.

Tabela 3.2. Valores dos carregamentos críticos (kN) obtidos com o GBTUL para os graus de refinamento (Gr) tipo 1, 2 e 3.

Gr.	L (cm)					
	15,0	70,0	150,0	200,0	300,0	400,0
1	82,61	83,51	82,61	88,71	118,10	69,78
2	82,58	83,48	82,59	88,67	118,10	69,78
3	82,59	83,48	82,59	88,67	118,10	69,78

Os resultados para o comprimento de 15 cm estão em boa concordância com os do item anterior. Já para os comprimentos de 70 cm, 150 cm e 200 cm o GBTUL fornece como modo de instabilidade o modo local de chapa (MLC), sendo esse com a ocorrência de mais de um harmônico longitudinal (i.e., o número de semiondas longitudinais pode ser maior do que 1), e com carregamento crítico da ordem de 83 kN (L=70cm e L=150cm) ou 88 kN (L=200cm). Essa resposta é bastante diferente daquela obtida com o uso do método das faixas finitas convencional, onde se obtém um modo distorcional (MD) com quase o dobro (L=70cm e L=150cm) ou o triplo (L=200cm) do carregamento crítico – o MFF convencional não toma conhecimento do MLC com mais de uma semionda, somente capturando o ponto crítico no nível de carregamento mais alto, que nesse caso é um MD, conforme apresentado na Tabela 3.1.



Por outro lado para os comprimentos de 300 cm e 400 cm o GBTUL fornece carregamentos e modos críticos que concordam com os resultados do item anterior, sendo os modos de instabilidade por flexotorção global (MGFT) em ambos os casos. Cabe observar que, analisando a Figura 3.6, temos a falsa impressão de que, para uma faixa de comprimentos entre 200cm e 300cm há um acréscimo do carregamento crítico. Isso ocorre em virtude de o número máximo de semiondas permitido no programa GBTUL ser igual, por *default*, a 10 harmônicos longitudinais.

Quando se altera o valor de “m” para, por exemplo, 20 harmônicos longitudinais, obtêm-se a curva ilustrada na Figura 3.8 e os valores das cargas críticas para 200 cm e 300 cm são alterados conforme a Tabela 3.3. Observar-se que para o comprimento de 300 cm o modo deixa de ser global de flexotorção (MGFT) e passa a ser um modo local de chapa (MLC).

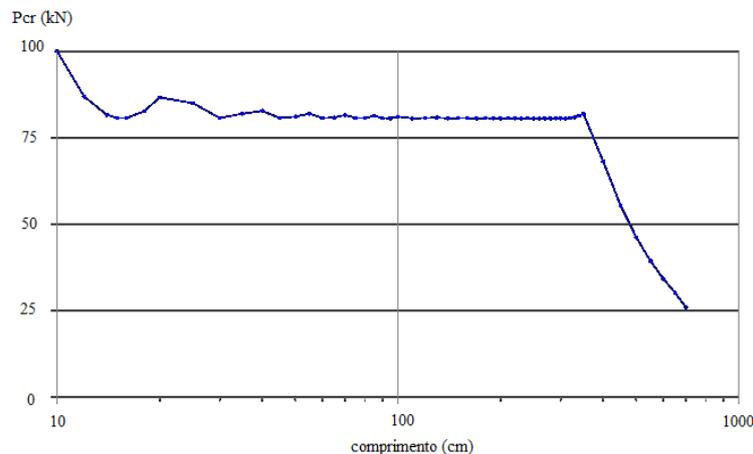


Figura 3.8 – Determinação da curva comprimento (cm) vs. carga crítica, Pcr (kN).

Tabela 3.3. Valores dos carregamentos críticos (kN) para os graus de refinamento (Gr) tipo 1, 2 e 3.

Gr.	L (cm)	
	200,0	300,0
1	82,52	82,55
2	82,49	82,52
3	82,49	82,52

Esse resultado indica que, para uma determinada faixa de comprimentos, o modo crítico independe do comprimento do perfil, a diferença estando somente na quantidade de harmônicos (i.e. semiondas “m”) longitudinais observados. O carregamento crítico corresponderá, nessa faixa, a modos de instabilidade de chapa, MLC.

### 3.1.3 Análise com elementos finitos de casca

A Figura 3.9 apresenta o primeiro modo de instabilidade obtido através do ABAQUS para os mesmos comprimentos analisados nos itens anteriores, considerando a faixa de cores indicada

(as cores se referem ao valor do deslocamento normalizado: máximo na cor vermelha e nulo na cor azul escura). Os carregamentos críticos para os três graus de refinamento estão apresentados na Tabela 3.4.

Tabela 3.4. Valores dos carregamentos críticos (kN) obtidos com o MEF-cascas para os graus de refinamento (Gr) tipo 1, 2 e 3.

Gr.	L (cm)					
	15,0	70,0	150,0	200,0	300,0	400,0
1	87,70	90,76	85,82	85,89	85,97	60,12
2	82,57	83,98	83,31	83,37	83,44	62,86
3	80,26	82,28	80,87	80,93	80,98	63,95

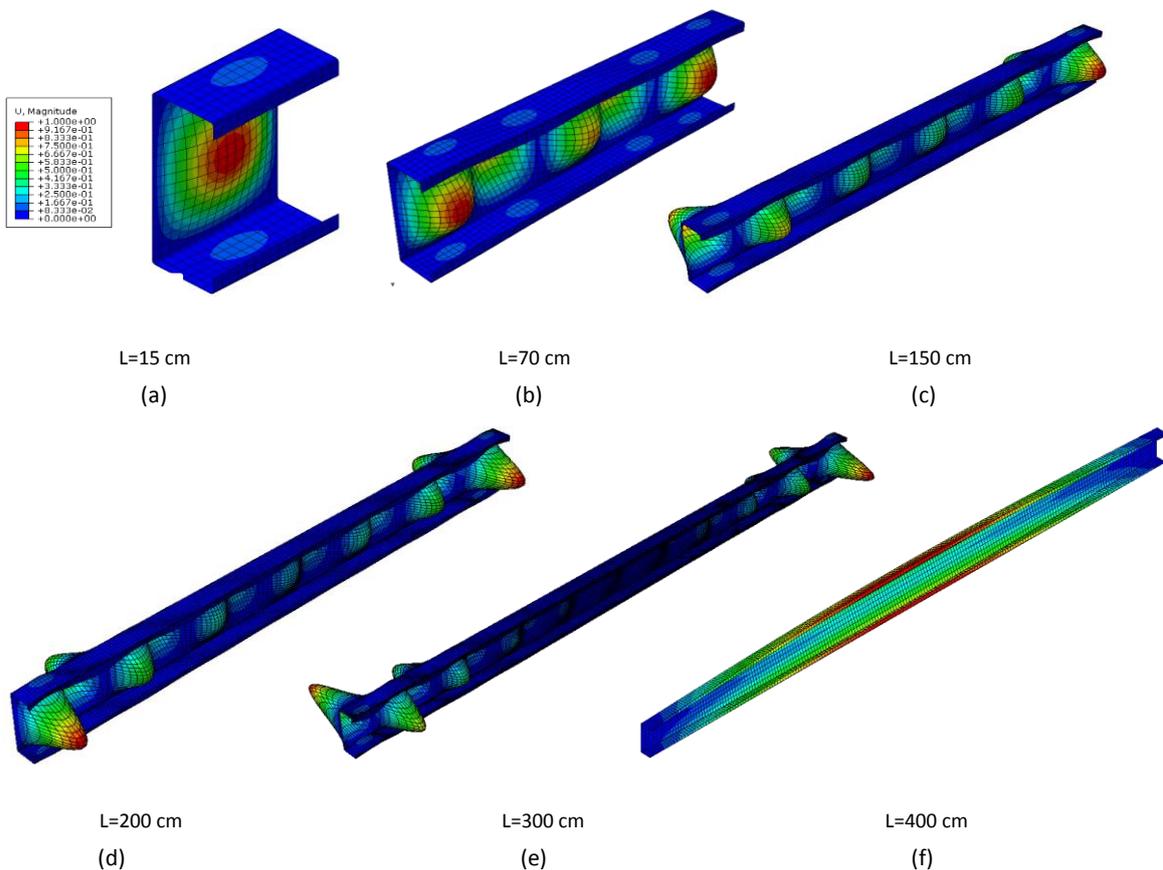


Figura 3.9 – Modos de instabilidade obtidos com o MEF-cascas para a discretização tipo 3 da seção transversal para comprimento de (a) 15 cm, (b) 70 cm, (c) 150 cm, (d) 200 cm, (e) 300 cm e (f) 400 cm.

A Figura 3.9b, Figura 3.9c, Figura 3.9d e Figura 3.9e apresentam o primeiro modo de instabilidade para comprimentos de 70 cm, 150 cm, 200 cm e 300 cm respectivamente. É importante observar que ambos os casos tratam de modos locais de chapa (MLC), o primeiro com cinco semiondas longitudinais, o segundo com dez semiondas longitudinais, o terceiro com treze semiondas longitudinais e por fim, o quarto com vinte semiondas longitudinais. Para



esses casos os resultados obtidos com o GBTUL (MEF-GBT) estão em ótima concordância com os resultados obtidos com o ABAQUS (MEF-cascas) se o número de semiondas permitido no GBTUL for suficientemente grande ( $m=20$  ou maior), enquanto que o CUFSM (MFF convencional) apresenta grande discrepância.

Para os casos de comprimento de 70 cm e 150 cm a Figura 3.10 apresenta o primeiro dos modos distorcionais, dentre todos os modos obtidos para esses perfis. Para esses comprimentos, respectivamente, tem-se: (a) o MD é o vigésimo modo, com  $P_{cr}=156,1$  kN e (b) o MD é o trigésimo modo, com  $P_{cr}=269,9$  kN. Convém destacar que esses são os modos que a análise via MFF convencional captura como sendo o primeiro modo de instabilidade para as barras de 70 cm e 150 cm de comprimento, respectivamente.



Figura 3.10 – Primeiro dos modos de instabilidade distorcional, MD: (a) vigésimo modo de instabilidade para  $L=70$ cm e (b) trigésimo primeiro modo de instabilidade para  $L=150$ cm.

Para os casos de 200 cm e 300 cm de comprimento a Figura 3.11 apresenta o primeiro dos modos globais, dentre todos os modos obtidos para esses perfis. Para esses comprimentos, respectivamente, tem-se: (a) o MGFT é o décimo sexto modo, com  $P_{cr}=229,1$  kN e (b) o MGFT é o vigésimo segundo modo, com  $P_{cr}=107,0$  kN. Para o GBTUL identificar esses modos é necessário configurar o valor de “m” para pelo menos 20 semiondas longitudinais e que esses são os modos que a análise via MFF convencional captura como sendo os primeiro modo de instabilidade para as barras de 200 cm e 300 cm de comprimento, respectivamente.

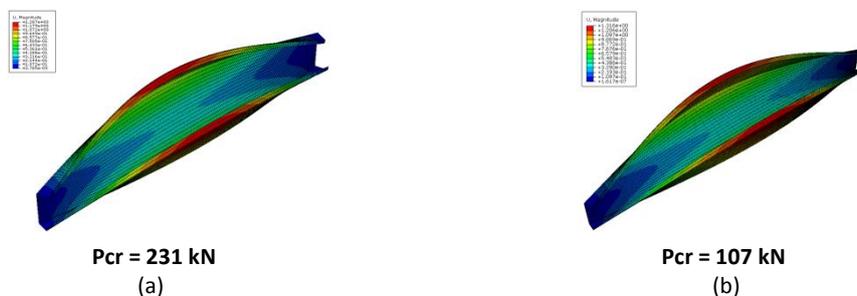


Figura 3.11 – Primeiro dos modos de globais de flexotorção, MGFT: (a) décimo sexto modo de instabilidade para  $L=200$ cm e (b) vigésimo segundo modo de instabilidade para  $L=300$  cm.

Em todos os casos estudados, nota-se que o nível de discretização no plano da seção transversal tem alguma influência (embora não determinante) no valor dos carregamentos



críticos. Esses diferem entre si de (i) 6% a 10% entre os tipos 1 e 3, (ii) 3% a 8% entre os tipos 1 e 2, e (iii) 2% a 3% entre os tipos 2 e 3.

### 3.2 Barra engastada submetida à flexão simples

Conforme apresentado na Figura 3.1, o perfil em análise é o Ue 200x75x20x2, engastado em uma extremidade e livre na outra e submetido a flexão devido a carga  $P$ , conforme ilustrado na Figura 3.12a.

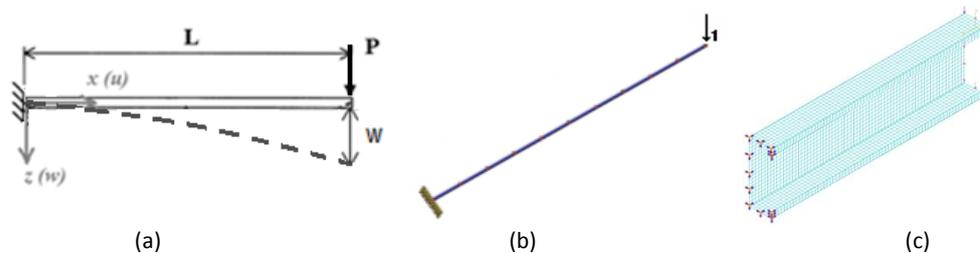


Figura 3.12 – (a) Barra isolada de comprimento  $L$ , engastada-livre e submetida ao carregamento  $P$ , (b) esquema estrutural no GBTUL; (c) esquema estrutural no ABAQUS.

Como os esforços não são uniformes ao longo da barra, o CUFEM não consegue simular esse problema e não será utilizado nesta análise. Aborda-se então a comparação das diferenças de modelagem e dos resultados entre o MEF-GBT e o MEF-cascas através dos programas GBTUL (Figura 3.12b) e ABAQUS (Figura 3.12c), respectivamente. Os resultados obtidos nessa análise são para seções com o grau de refinamento tipo 3, conforme ilustrado na Figura 3.1.

#### 3.2.1 Análise com a teoria generalizada de viga

A Figura 3.13 apresenta a curva obtida com o uso do GBTUL, onde no eixo das abscissas tem-se o comprimento da barra em centímetros (escala logarítmica) e no eixo das ordenadas o carregamento crítico em kN. Os pontos destacados em vermelho representam as barras cujos comprimentos são 15 cm, 70 cm, 200 cm, 300 cm e 400 cm. Os modos de instabilidade e os carregamentos críticos referentes aos pontos destacados estão apresentados na Figura 3.14.

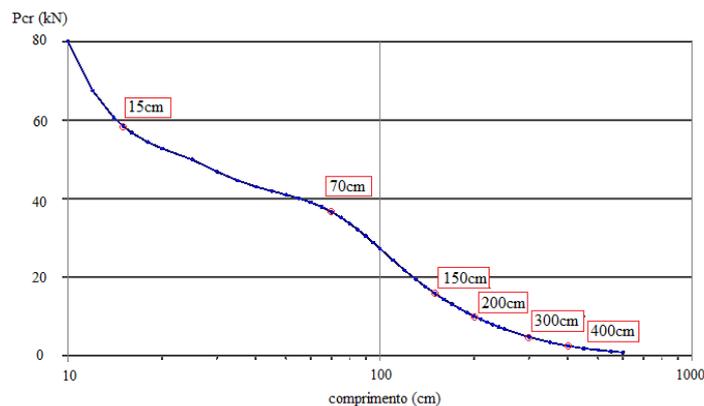


Figura 3.13 – Determinação da curva comprimento (cm) vs. carga crítica,  $P_{cr}$  (kN).

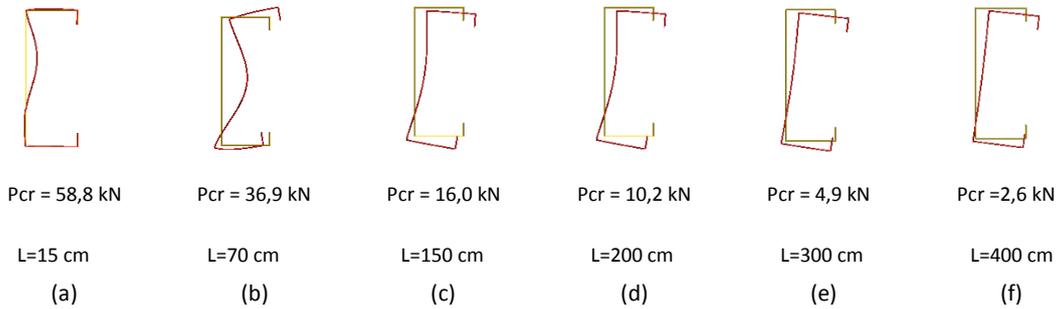


Figura 3.14 – Carregamentos críticos e modos de instabilidade obtidos com o GBTUL (seção transversal na extremidade carregada) para L igual a: (a) 15 cm – meio do vão, (b) 70 cm- extremidade carregada, (c) 150 cm, (d) 200 cm, (e) 300 cm e (f) 400 cm.

### 3.2.2 Análise com elementos finitos de casca

As figuras a seguir apresentam os primeiros modos de instabilidade e os carregamentos críticos obtidos através do ABAQUS para os mesmos comprimentos analisados nos itens anteriores, considerando a faixa de cores indicada (deslocamento normalizado máximo na cor vermelha e nulo na cor azul escura).

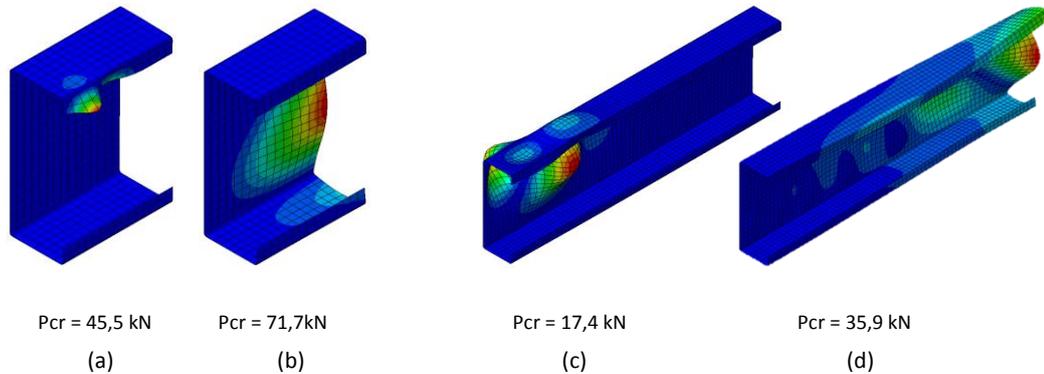


Figura 3.15 – Carregamentos críticos obtidos com o MEF-casca para: (a) primeiro modo para L=15cm, (b) quinto modo para L=15cm, (c) primeiro modo para L=70cm e (d) décimo sétimo modo para L=70cm.

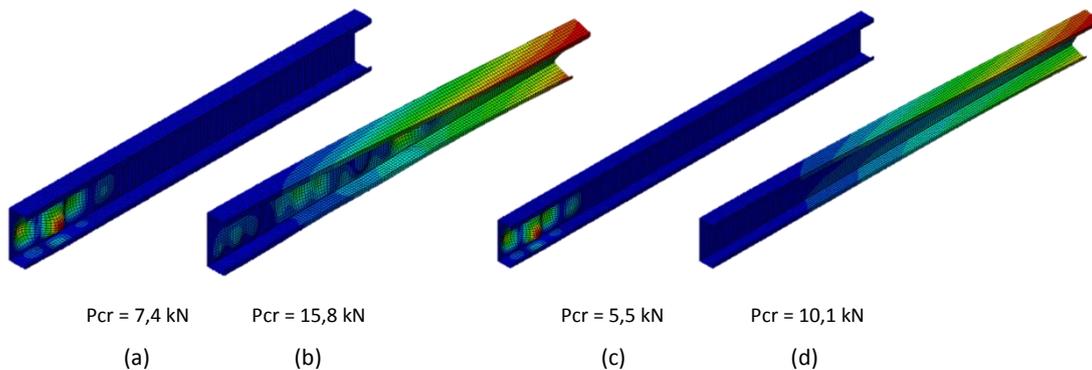


Figura 3.16 – Carregamentos críticos para: (a) primeiro modo para L=150cm, (b) trigésimo modo para L=150cm, (c) primeiro modo para L=200cm e (d) vigésimo nono modo para L=200cm.

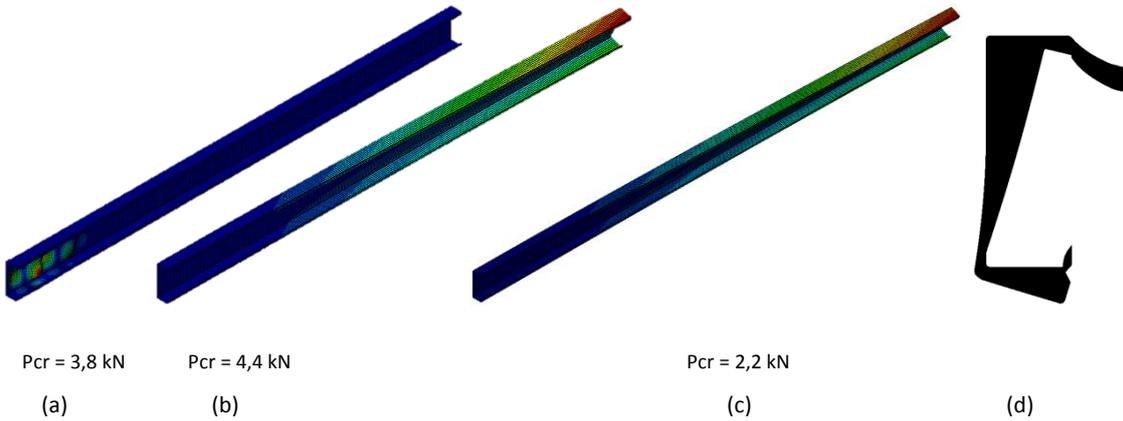


Figura 3.17 – Carregamentos críticos para: (a) primeiro modo para  $L=300\text{cm}$ , (b) nono modo para  $L=300\text{cm}$ , (c) primeiro modo para  $L=400\text{cm}$  e (d) vista lateral do primeiro modo para  $L=400\text{cm}$ .

Os resultados obtidos com o ABAQUS, e apresentados anteriormente, são comparados com os resultados obtidos com o GBTUL graficamente na Figura 3.18. A curva azul representa os carregamentos críticos mínimos (*i.e.* o menor dos autovalores) obtidos com o MEF-cascas em função do comprimento da barra. A curva vermelha representa os carregamentos críticos mínimos (*i.e.* o menor dos autovalores) obtidos com o MEF-GBTUL em função do comprimento da barra. A curva verde representa os carregamentos críticos de modos superiores obtidos com o MEF-cascas, *i.e.* não são o menor dos autovalores, também em função do comprimento da barra.

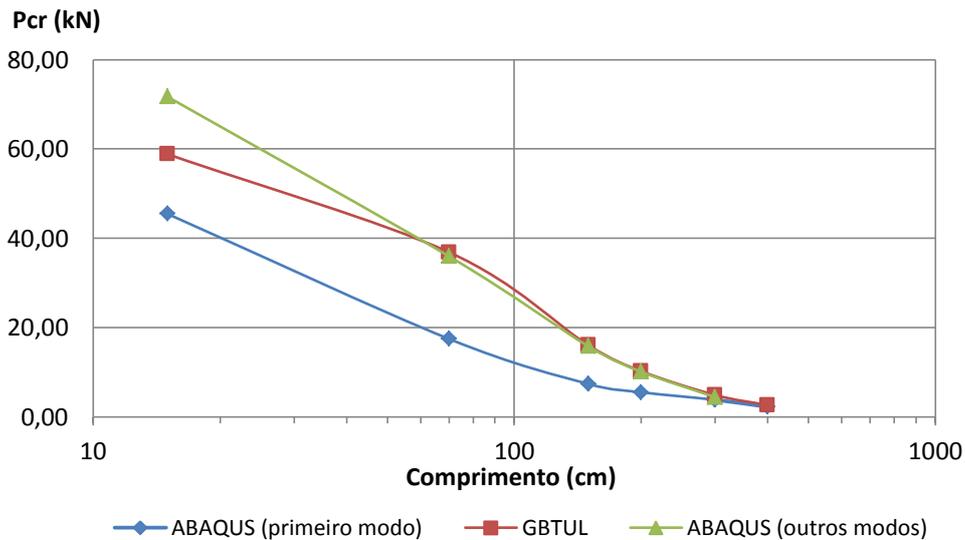


Figura 3.18 – Curvas dos carregamentos críticos em função dos comprimentos da barra para as análises (i) via ABAQUS, considerando apenas o 1º modo, (ii) via GBTUL e (iii) via ABAQUS, considerando modos superiores ao 1º.



#### 4 CONCLUSÃO

Avaliaram-se aqui três métodos numéricos para a análise linear de estabilidade de perfis de seção U enrijecido, biarticulados submetidos à compressão uniforme e engastados submetidos à flexão simples.

A análise com o Método das Faixas Finitas, apesar de ser uma alternativa de baixo custo computacional, revela algumas limitações a priori: (i) as barras devem ser obrigatoriamente prismáticas; (ii) o método só permite barras isoladas; (iii) não há restrição ao empenamento; e (iv) por haver nós somente nas seções das extremidades, o carregamento tem que ser obrigatoriamente uniforme ao longo da barra. Essa última limitação é a mais desfavorável para o método e não permitiu neste trabalho a simulação de uma viga engastada sob flexão simples.

A análise com a Teoria Generalizada de Vigas por meio de elementos finitos de barra tem uma abordagem mais geral do que o MFF e por sua vez, oferece bons resultados analíticos, o que só é possível quando se trata de barras simplesmente apoiadas. No caso geral, em que a solução numérica é necessária, chama-se a atenção para a escolha do número máximo de semiondas a serem levadas em consideração na determinação dos carregamentos críticos, já que a escolha insuficiente do parâmetro “m” pode levar ao falso resultado de carregamentos superiores ao mínimo.

A análise com o Método dos Elementos Finitos utilizando elementos de casca, apesar de ser mais confiável e geral, requer a imposição criteriosa das condições de contorno e dos carregamentos nas seções extremas. No caso da análise de estabilidade de perfis formados a frio, a incorreta modelagem dessas condições pode acarretar em modos e carregamentos críticos completamente não condizentes com o problema em apreço. Desde que se tratem esses aspectos adequadamente, contudo, a análise com o MEF-casca será sempre a mais confiável, uma vez que o modelo de casca representa mais fielmente o problema físico.

O resultado das análises realizadas nos programas CUFSM e GBTUL fornecem curvas que caracterizam o carregamento crítico em função do comprimento longitudinal do perfil. Essa forma de apresentação dos resultados gera uma boa visão do caso em estudo – desde que, claro, os resultados sejam confiáveis.

No caso da barra biarticulada submetida à compressão uniforme, observou-se que em determinados casos o CUFSM não é capaz de fornecer mínimos distintos para os modos de instabilidade local (MLC e MD). Para estes casos, o primeiro modo de instabilidade fornecido pelo CUFSM corresponde a carregamentos críticos superiores aos fornecidos pelo GBTUL e pelo ABAQUS. Isto pode ser explicado pelo fato de as funções de forma do CUFSM, para o método convencional das faixas finitas, considerarem apenas uma semionda “m” ao longo do comprimento longitudinal, de modo que o modo distorcional muitas vezes resulta num



autovalor inferior ao modo local de chapa com uma semionda. Esse problema pode ser parcialmente contornado utilizando-se a formulação alternativa do MFF confinado, ou cFSM, Esse método modificado introduz graus de liberdade adicionais na direção longitudinal, enriquecendo a aproximação (nada garante, contudo, que esse artifício seja suficiente para todas as situações). Com relação ao grau de discretização da seção transversal, a análise como MEF-cascas (ABAQUS) revelou-se a única que apresenta alguma sensibilidade, embora não significativa.

No caso da barra engastada submetida à flexão simples a análise numérica via GBTUL não conseguiu identificar mínimos distintos para os comprimentos de 15 cm, 70 cm, 150 cm, 200 cm e 300 cm. Para estes casos, o primeiro modo de instabilidade fornecido pelo GBTUL corresponde a carregamentos críticos superiores aos fornecidos pelo ABAQUS. Para os comprimentos de 70 cm, 150 cm, 200 cm e 300 cm o ABAQUS conseguiu identificar os modos que o GBTUL forneceu erroneamente como os primeiros modos de instabilidade. Para o menor dos comprimentos da barra,  $L=15\text{cm}$ , o ABAQUS não conseguiu identificar um modo semelhante ao apresentado pelo GBTUL; isso pode ser melhor explicado pelo fato de os modelos cinemáticos não representarem a mesma coisa. O modelo de barra do GBTUL considera o carregamento atuando no centro de torção da barra enquanto que o modelo de cascas do ABAQUS simula um carregamento linear ao longo de toda a seção da extremidade, *i.e.* há torção da barra no instante zero da análise, situação esta mais semelhante com a realidade, visto que o centro de torção é um ponto fora da seção transversal da viga. Além disso, o modelo de barra para a viga de 15 cm de comprimento não é um modelo adequado, uma vez que a altura da seção transversal representa 1,33 vezes o comprimento da viga.

### Agradecimentos

Os autores agradecem aos colegas Eduardo Simões, Jorge Costa, Ricardo Lahuerta, Leonardo Lago e Fernando Gonçalves do Laboratório de Mecânica Computacional da Escola Politécnica da USP, pelo auxílio e discussões acerca das modelagens com o MEF. O segundo autor também agradece ao CNPq pelo suporte financeiro (processo 303793/2012-0).

### REFERÊNCIAS

- 1 Campello, E. M. B. *Análise não-linear de peris metálicos conformados a frio*. Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2000. Dissertação de Mestrado.
- 2 Zagottis, D. Capítulo 10: Estabilidade e instabilidade do equilíbrio das estruturas. In *Introdução à teoria das estruturas*. Escola Politecnica da Universidade de São Paulo - Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, São Paulo, 1980.
- 3 Silva, L. S. and Gervásio, H. *Dimensionamento de Estruturas Metálicas: Métodos Avançados*. CMM - Associação Portuguesa de Construção Metálica e Mista, Coimbra, Portugal, 2007.



- 4 Farshad, M. *Stability of Structures*. Elsevier Science B. V., Dübendorf, Switzerland, 1994.
- 5 Thompson, J.M.T. *Instabilities and Catastrophes in Science and Engineering*. John Wiley & Sons, London, 1982.
- 6 Gambhir, M. L. *Stability Analysis and Design of Structures*. Springer, Berlin, Alemanha, 2004.
- 7 Camotim, D., Silvestre, N., Gonçalves, R., and Dinis, P.B. *GBT - Based Analysis and design of thin-walled metal and FRP members: recent developments*. APCMR, Brasov, Romênia, 2006.
- 8 Schafer, B. W. and Ádány, S. *Buckling analysis of cold-formed steel members using CUFSM: conventional and constrained finite strip methods*. October 26-27, Orlando, Florida, USA., 2006.
- 9 Bebiano, R., Pina, P., Silvestre, N., and Camotim, D. *GBTUL – Buckling and Vibration Analysis of Thin-Walled Members*. DECivil/IST, Technical University of Lisbon. 2008.
- 10 ABAQUS. *Abaqus 6.10 Documentation*. Dassault Systèmes, Providence, RI, USA, 2010.
- 11 Li, Z. and Schafer, B. W. Buckling analysis of cold-formed steel members with general boundary conditions using CUFSM: conventional and constrained finite strip method. In *Twentieth International Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures* ( November 3-4, Saint Louis, Missouri, USA. 2010).
- 12 Sarawit, A. T., Kim, Y., Bakker, M. C. M., and Pekoz, T. *The finite element method for thin-walled members-applications*. Elsevier Science Ltd. 2003.