

Tema: oficial de submissão

## Formulação do Modo de Flambagem Distorcional em Perfis de Aço Formados a Frio de Seção 'U Enrijecido' sob Compressão Axial\*

Guilherme Cardoso de Salles<sup>1</sup>  
Daniel Carlos Taissum Cardoso<sup>2</sup>  
Eduardo de Miranda Batista<sup>3</sup>  
Paulo Batista Gonçalves<sup>4</sup>

### Resumo

O desenvolvimento de fórmulas para o cálculo de tensões críticas de flambagem distorcional de vigas e colunas tem sido alvo de pesquisas na área de estruturas de paredes finas nas últimas décadas (e.g. Lau e Hancock [1], Schafer [2], Teng *et al.* [3], Silvestre e Camotim [4], Zhou *et al.* [5]). Entretanto, as fórmulas obtidas por esses autores dependem do cálculo de inúmeros parâmetros, dificultando sua utilização em projetos de estruturas de uma forma adequada. Com isso, fórmulas práticas e precisas para prever tensões críticas do modo distorcional de perfis de aço formados a frio (PFF) não estão ainda disponíveis para aplicação, de forma combinada com o método das seções efetivas proposto na norma brasileira NBR 14762:2010[6]. O presente trabalho utiliza o Método do Quociente de Rayleigh para desenvolver fórmulas explícitas para o cálculo das tensões de flambagem distorcional em barras com seção do tipo U enrijecido sob compressão axial. As expressões foram validadas comparando-se os resultados obtidos com os resultados pela *generalized beam theory* (GBT) para 62 seções comerciais de diferentes dimensões. As fórmulas finais são relativamente simples e os valores de tensão crítica obtidos pelo método proposta apresentaram uma média de  $0,97 \pm 0,10$  quando comparados com a GBT.

**Palavras-chave:** Estruturas de Paredes Finas; Colunas de Aço Formadas a frio; Flambagem Distorcional.

<sup>1</sup> Aluno de Mestrado, Programa de Engenharia Civil, COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

<sup>2</sup> Professor Assistente, Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

<sup>3</sup> Professor Titular, Programa de Engenharia Civil, COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

<sup>4</sup> Professor Titular, Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

---

\* Contribuição tecnológica ao **Construmetal 2016** – Congresso Latino-americano da Construção Metálica – 20 a 22 de setembro de 2016, São Paulo, SP, Brasil.

## Closed-Form Equation for Distortional Buckling of Cold-Formed Lipped Channels Subject to Axial Compression

### Abstract

In the past decades, many scientific researches have focused on the development of rational explicit equations to determine the distortional buckling critical stress of thin-walled columns and beams (e.g. Lau and Hancock [1], Schafer [2], Teng *et al.* [3], Silvestre and Camotim [4], Zhou *et al.* [5]). However, these expressions require the computation of several parameters, making them complex to be effectively used in structural design. Consequently, practical and accurate analytical formulae for design are still required to enhance the use of effective section method prescribed by the Brazilian code NBR 14762:2010[6]. This paper employs Rayleigh quotient approximation to develop explicit equation for distortional buckling of long lipped channel columns subject to axial compression. The obtained expressions are validated by comparisons with the results obtained with generalized beam theory (GBT) for 62 commercially available sections with distinct geometries. The formulae are relatively simple and the average ratio of critical stresses with proposed method and GBT is  $0.97 \pm 0.10$  within the range of typical cross-sections.

**Keywords:** Thin-walled Structures; Cold-formed steel columns; Distortional Buckling.

## 1. INTRODUÇÃO

Os métodos para cálculo de carga última ou de colapso de colunas de aço formado a frio exigem o conhecimento das forças críticas de flambagem elástica local, distorcional e globais, visto que as curvas de resistência dependem de índices de esbeltezas expressos pela relação entre a carga de plastificação total da seção e a carga crítica de flambagem elástica de cada modo. Essas forças de flambagem elástica podem ser obtidas de forma precisa por métodos numéricos como o Método dos Elementos Finitos, o Métodos das Faixas Finitas (Schafer e Ádány [7]) ou softwares que implementam soluções com base na *Generalised Beam Theory* (Schardt [8]). Contudo, a disponibilidade de fórmulas para o seu cálculo manual permitiria o uso do método das seções efetivas (Batista [9]) proposto na norma brasileira NBR 14762:2010[6] de forma muito mais prática, sem a necessidade de recorrer a programas computacionais, como já é possível proceder quando tratamos da flambagem local de PFFs.

Para o modo distorcional, ainda não se dispõe de fórmulas práticas e precisas para a previsão da força axial de compressão e dos momentos críticos elásticos. Alguns trabalhos científicos (Lau e Hancock [1], Schafer [2], Teng *et al.* [3], Silvestre e Camotim [4]) desenvolveram fórmulas para o cálculo da tensão crítica de flambagem distorcional, entretanto os procedimentos propostos exigem o cálculo de inúmeros parâmetros, o que dificulta seu uso prático em projetos de engenharia. Procedimentos para o cálculo direto da tensão crítica de flambagem distorcional são encontrados em algumas normas, como é o caso, por exemplo, da especificação válida para Austrália e Nova Zelândia (AS/NZS 4600:2005[10]).

Essa necessidade de fórmulas simples e precisas para cálculo de tensões críticas de flambagem distorcional motivou essa pesquisa. A partir de uma formulação por Energia Potencial de sistemas estruturais e a aplicação do Método do Quociente de Rayleigh, fórmulas para calcular o comprimento crítico e a tensão crítica de flambagem elástica do modo distorcional para colunas com seção do tipo U Enrijecido foram obtidas. A formulação aplicada nesse trabalho assemelha-se à utilizada por Cardoso *et al.* [11] para desenvolver fórmulas explícitas para flambagem local de perfis pultrudados.

### 1.1 Revisão Bibliográfica

O modo distorcional caracteriza-se, para seções do tipo U enrijecido, pela rotação do conjunto mesa+enrijecedor em torno do canto dobrado alma-mesa, com flexão fora do plano da alma (semelhante ao modo de flambagem local) e deslocamentos das arestas (cantos dobrados) das chapas que compõem o perfil. Em geral, o conjunto mesa+enrijecedor sofre pequenas deformações por flexão. A figura 1 apresenta o modo distorcional para o caso de compressão axial.

---

\* Contribuição tecnológica ao **Construmetal 2016** – Congresso Latino-americano da Construção Metálica – 20 a 22 de setembro de 2016, São Paulo, SP, Brasil.



**Figura 1: Deformações da seção transversal no modo distorcional para caso de compressão axial.**

Nos perfis U e Z enrijecidos mais usuais, Schafer [12] afirma que o modo de flambagem local é geralmente o modo crítico, dada a esbelteza natural da alma. Entretanto, segundo Vazquez [13], existem seções em que o modo distorcional pode ser prevalente: (i) colunas com seção transversal do tipo rack, (ii) seções U enrijecidos com relação entre altura da alma e largura da mesa em torno de 1, (iii) seções com enrijecedores intermediários na mesa e (iv) seções com enrijecedores de borda excessivamente curtos.

Sharp [14] apresenta o primeiro tratamento teórico da flambagem distorcional, denominada “*overall buckling*”. Esse foi o primeiro trabalho a notar a similaridade de comportamento entre uma coluna sofrendo flambagem distorcional e uma estrutura formada pela mesa+enrijecedor submetida à compressão uniforme com apoios elásticos na extremidade não enrijecida da mesa. A partir de simplificações na restrição à rotação na junção da mesa com a alma, foi feita uma aproximação para a tensão crítica de flambagem distorcional de perfis U enrijecido e cartola de alumínio. Silvestre e Camotim [4] apontam duas inconsistências no modelo de Sharp [14]: (i) considerar as restrições elásticas devido à alma independentes da carga aplicada e (ii) supor que o conjunto mesa+enrijecedor não se movia lateralmente.

Lau e Hancock [1] utilizaram o modelo de Sharp [14], mas consideraram a influência da carga aplicada nas restrições elásticas e permitiram deslocamentos laterais do conjunto mesa+enrijecedor para obter as tensões de bifurcação de flambagem distorcional para colunas birrotuladas de perfis U enrijecidos, perfis racks de 90° e perfis racks de 90° com enrijecedores adicionais. Esse novo modelo proposto considera as deformações por flexão na mesa e no enrijecedor através de apenas um fator de correção. Sobre o modelo de Lau e Hancock, Li e Chen [15] afirmam que este, quando comparado com o Método das Faixas Finitas, apresenta resultados não-conservadores para a tensão crítica de flambagem, sobretudo para casos em que a rigidez rotacional elástica é elevada.

Partindo do mesmo modelo de Lau e Hancock [1], Hancock [16] obteve expressões para o cálculo da tensão crítica de flambagem distorcional elástica em membros birrotulados de perfis U e Z enrijecidos sofrendo flexão em torno do eixo perpendicular à alma.

---

\* Contribuição tecnocientífica ao **Construmetal 2016** – Congresso Latino-americano da Construção Metálica – 20 a 22 de setembro de 2016, São Paulo, SP, Brasil.

Teng *et al.* [3] estendeu a formulação de Lau e Hancock [1] para perfis U enrijecidos e racks submetidos a compressão uniforme e flexão em torno do eixo paralelo à alma (eixo de menor inércia para maioria desses perfis). Foram analisadas peças de seção rack com condições de apoio simplesmente apoiadas e submetidas à carga de compressão excêntrica, gerando flexão no plano de simetria.

Zhou *et al.* [5], utilizando o modelo teórico de Lau e Hancock [1], apresentam fórmulas para cálculo da tensão crítica de flambagem distorcional de perfis U enrijecidos com extremidades simplesmente apoiadas e engastadas sob compressão uniforme. As fórmulas obtidas são semelhantes às de Lau e Hancock, mas um novo fator de redução para a rigidez rotacional do apoio devido à flexão da alma é adotado.

Schafer [2] propôs e validou um novo método para prever a tensão de flambagem distorcional de colunas birrotuladas de perfis U e Z enrijecidos e racks. Os modelos de Lau e Hancock [1] e Schafer [2] são conceitualmente semelhantes para os flanges das seções, a diferença reside no tratamento da alma já que Schafer faz uma aproximação explícita da parcela da alma na rigidez rotacional na junção alma/mesa (Schafer [12]). Nessa aproximação, a rigidez rotacional da junção é composta por uma parcela de rigidez geométrica dependente da tensão atuante e outra parcela de rigidez elástica, sendo que tanto a alma quanto a mesa contribuem para a rigidez total.

Silvestre e Camotim [4] apresentam uma formulação baseada no *Generalized Beam Theory* (GBT) para determinar o comprimento crítico e a tensão crítica de flambagem distorcional. As fórmulas são aplicáveis para perfis U e Z enrijecidos com qualquer inclinação de enrijecedores e perfis cartola, que podem estar submetidos à compressão axial, flexão ou à combinação das duas e a quatro condições de apoio distintas. Por incorporar “*folded-plate theory*” em sua formulação, este método contorna as limitações das outras formulações apresentadas, notadamente a consideração da flexão dos flanges e enrijecedores. O trabalho de Silvestre e Camotim [17] valida essa formulação.

Os métodos citados anteriormente fornecem fórmulas racionais e precisas para a obtenção da tensão crítica de flambagem distorcional. Entretanto a aplicação das fórmulas propostas exige o cálculo de diversos parâmetros, aumentando a possibilidade de erros e diminuindo a praticidade do uso.

## 2. METODOLOGIA DE ANÁLISE DA FLAMBAGEM DISTORCIONAL

O método do Quociente de Rayleigh é utilizado nesse trabalho para determinar a tensão crítica de flambagem distorcional de colunas de seção U enrijecido. Assume-se uma configuração deformada aproximada para a coluna e calcula-se, para essa configuração, a energia de deformação,  $U$ , e o trabalho por unidade de força de compressão,  $W$ . Assim, a tensão crítica  $\sigma_{cr}$  pode ser obtida pela condição de equilíbrio neutro, conforme equação 1:

---

\* Contribuição tecnológica ao **Construmetal 2016** – Congresso Latino-americano da Construção Metálica – 20 a 22 de setembro de 2016, São Paulo, SP, Brasil.

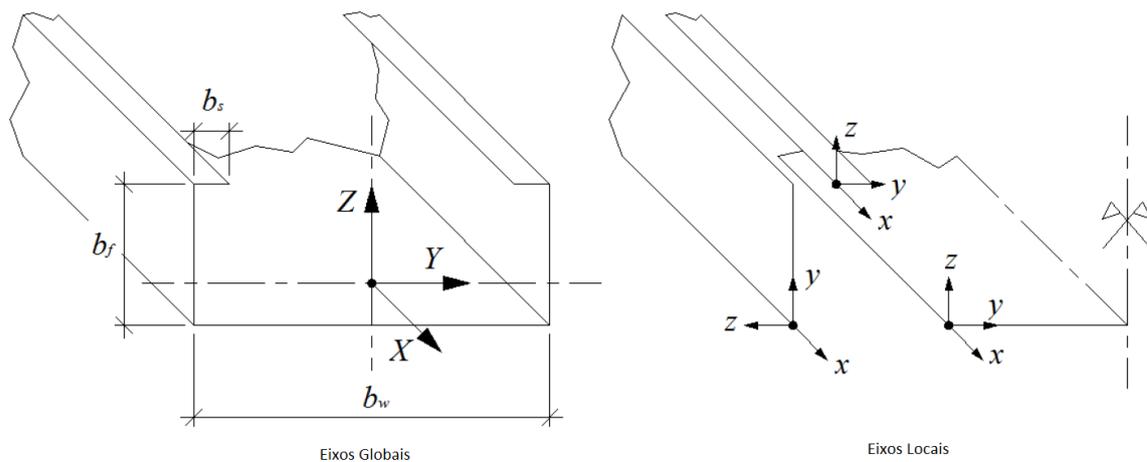
$$\sigma_{cr} = \frac{U}{W} \quad (1)$$

Para esse método, são exigidas configurações deformadas que atendam às condições cinemáticas e sejam contínuas até a derivada de ordem 1. A precisão dos resultados depende fundamentalmente da qualidade da forma deformada assumida, quanto mais próxima esta estiver da configuração real, mais próxima da tensão crítica real estará o valor obtido pelo método.

As hipóteses básicas assumidas para esse trabalho são: (i) material isotrópico e linearmente elástico, (ii) compatibilidade de rotação entre as paredes que constituem a seção, ou seja, os ângulos iniciais entre essas são preservados após a flambagem, (iii) as deformações por flexão de placa (fora do plano) do flange e do enrijecedor são desprezadas, (iv) pequenos deslocamentos e rotações são assumidos e (v) considera-se uma coluna suficientemente longa de forma que desenvolvam-se múltiplas meias-ondas do modo e que a influência das condições de extremidade seja desprezada. O modo de flambagem  $\phi$  pode ser escrito conforme a expressão a seguir:

$$\phi(X, Y, Z) = \phi_{yz}(Y, Z) \text{sen}\left(\frac{\pi X}{L}\right) \quad (2)$$

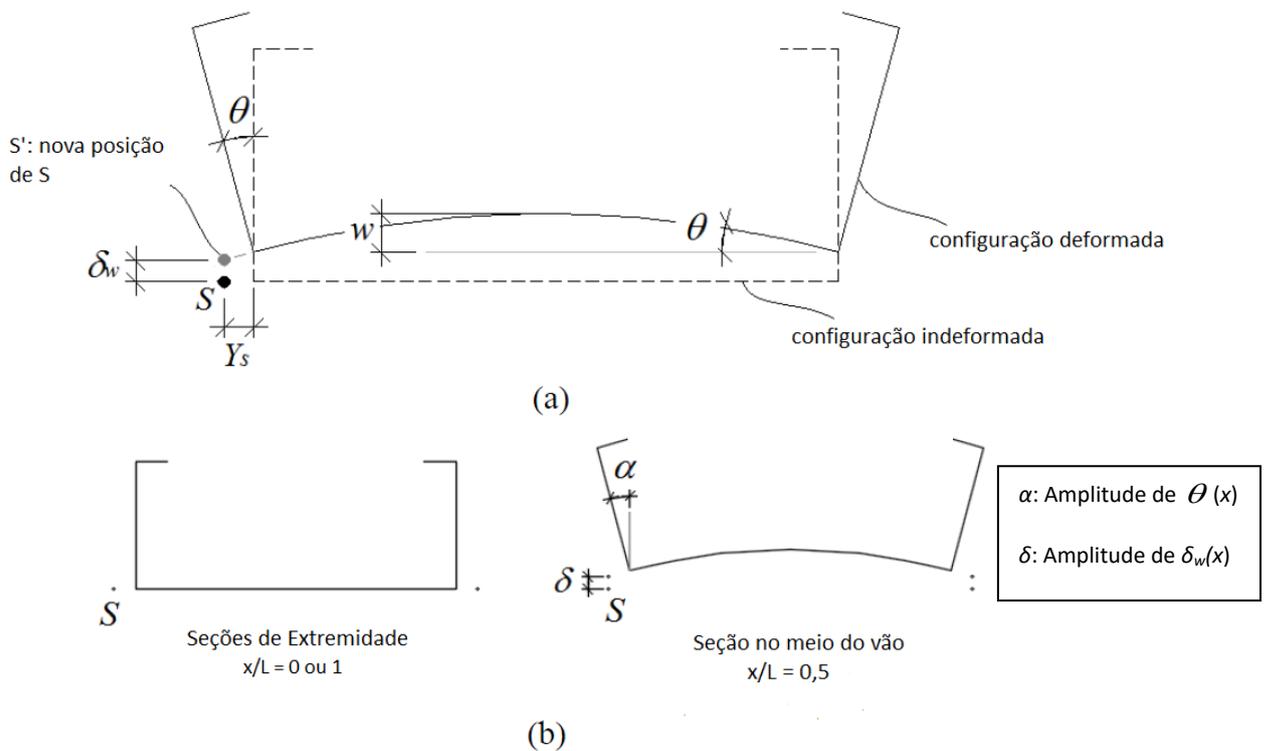
Na equação 2,  $\phi_{yz}$  é a deformação da seção transversal,  $L$  é o comprimento de flambagem e  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  são os eixos globais conforme a figura 2. Eixos locais  $x$ ,  $y$  e  $z$  para cada parede do perfil também são adotados e apresentados na figura 2, sendo  $b_w$ ,  $b_f$  e  $b_s$  as dimensões da alma, mesa e enrijecedor, respectivamente e  $t$  a espessura constante das paredes.



**Figura 2: Convenção de eixos em uma seção de chapas dobradas do tipo U enrijecido.**

Nesse trabalho, duas configurações deformadas distintas foram consideradas para determinar a tensão crítica, originando os Modelos 1 e 2 apresentados a seguir.

O modo de flambagem distorcional pode ser entendido pela combinação de 3 parcelas ou funções de deslocamentos apresentadas na figura 3: (i) uma parcela de flexão da alma expressa por  $w$ , (ii) uma parcela de rotação do conjunto flange+enrijecedor em torno do ponto S distante  $Y_s$  da junção alma/mesa expressa por  $\theta$  e (iii) uma parcela de flexão da coluna em torno do seu eixo de menor inércia expressa por  $\delta_w$ .



**Figura 3: (a) Deformações do modo distorcional (b) configurações deformadas das seções extremas e central.**

As energias de deformações relacionadas a cada parcela podem ser calculadas pelas expressões a seguir, todas referidas aos eixos locais (e.g., Bazant e Cedolin [18]):

$$U_p = \frac{D}{2} \int_0^L \int_0^{b_w} \left\{ \left( \frac{d^2}{dx^2} w(x, y) + \frac{d^2}{dy^2} w(x, y) \right)^2 - 2(1-\nu) \left[ \frac{d^2}{dx^2} \frac{d^2}{dy^2} w(x, y) - \left( \frac{d}{dx} \frac{d}{dy} w(x, y) \right)^2 \right] \right\} dy dx \quad (3)$$

$$U_w = \frac{EI_w}{2} \int_0^L \left( \frac{d^2}{dx^2} \theta(x) \right)^2 dx \quad (4)$$

$$U_t = \frac{GJ}{2} \int_0^L \left( \frac{d}{dx} \theta(x) \right)^2 dx \quad (5)$$

$$U_\delta = \frac{EI_{YY}}{2} \int_0^L \left( \frac{d^2}{dx^2} \delta_w(x) \right)^2 dx \quad (6)$$

$U_p$ ,  $U_w$ ,  $U_t$  e  $U_\delta$  são respectivamente as energias de deformação da flexão da alma, do empenamento da mesa+enrijecedor, da torção de St. Venant da mesa+enrijecedor e da flexão da coluna.  $D$  é a rigidez flexional de placa,  $D = Et^3/[12(1-\nu^2)]$ ,  $E$  é o módulo de elasticidade,  $G$  é o módulo de elasticidade transversal,  $\nu$  é o coeficiente de Poisson,  $I_w$  é a constante de empenamento do conjunto mesa+enrijecedor em relação ao ponto S,  $J$  é a constante de torção do conjunto mesa+enrijecedor e  $I_{YY}$  é a inércia da seção em relação ao eixo de menor inércia Y. A energia de deformação total  $U$  será a soma dessas parcelas considerando a seção inteira ( $U = U_p + 2 U_w + 2 U_t + U_\delta$ ).

Os deslocamentos de cada parede, apresentados na tabela 1, podem ser escritos em função de  $w$ ,  $\theta$  e  $\delta_w$ . Adota-se a convenção de  $v_{t,i}$  para denotar os deslocamentos na direção y da parede i e  $w_{t,i}$ , os deslocamentos na direção z da parede i. O trabalho produzido pela força de compressão para cada parede,  $W_i$ , pode ser calculado pela equação 7 e o trabalho total  $W$  será a soma de todos os  $W_i$ 's.

$$W_i = \frac{t}{2} \int_0^L \int_0^b \left[ \left( \frac{d}{dx} w_{t,i}(x, y, z) \right)^2 + \left( \frac{d}{dx} v_{t,i}(x, y, z) \right)^2 \right] dy dx \quad (7)$$

Sendo  $b$ , a largura da parede i.

Tabela 1: Componentes de Deslocamentos de cada Parede

Parede	$v_t$	$w_t$
Alma	$v_{t,w}(x, y) = 0$	$w_{t,w}(x, y) = w(x, y) + \delta_w(x) + \theta(x) \cdot (Y_s + y)$
Flange	$v_{t,f}(x, y) = \delta_w(x) + \theta(x) \cdot Y_s$	$w_{t,f}(x, y) = \theta(x) \cdot y$
Enrijecedor	$v_{t,s}(x, y) = -\theta(x) \cdot b_f$	$w_{t,s}(x, y) = \delta_w(x) + \theta(x) \cdot (Y_s + y)$

### 2.1 Modelo 1

Para esse modelo: (i) considera-se que a junção alma/mesa não translada, isto é, o pólo de rotação S coincide com a junção ( $Y_s=0$ ), e (ii) despreza-se a parcela de flexão na menor inércia

\* Contribuição tecnocientífica ao **Construmetal 2016** – Congresso Latino-americano da Construção Metálica – 20 a 22 de setembro de 2016, São Paulo, SP, Brasil.

( $\delta_w=0$ ). Com isso, os deslocamentos  $w$  e  $\theta$  podem ser escritos de acordo com as equações 8 e 9:

$$\theta(x) = \alpha \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (8)$$

$$w(x, y) = \frac{\alpha b_w}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{b_w}\right) \quad (9)$$

Substituindo esses deslocamentos nas equações de 3 a 6, a energia de deformação total  $U$  será  $U = U_p + 2(U_w + U_t)$  e o trabalho potencial  $W$  será  $W = W_w + 2(W_f + W_s)$ . A tensão crítica  $\sigma_{cr,d}$  do Modelo 1 pode ser calculada então pela equação 10, obtendo-se a seguinte expressão final após manipulações algébricas:

$$\sigma_{cr,d} = \frac{\frac{DL^2}{4b_w} \left(1 + \left(\frac{b_w}{L}\right)^2\right)^2 + \frac{\pi^2}{L^2} EI_w + GJ}{I_0 + b_w^3 t / (4\pi^2)} \quad (10)$$

Na equação 10,  $I_0$  é o momento de inércia polar do conjunto mesa+enrijecedor em relação à junção alma/mesa, que coincide com o ponto S.

Derivando a expressão de  $\sigma_{cr,d}$  em relação a  $L$  e igualando a zero, o comprimento crítico de flambagem pode ser obtido, conforme a equação 11:

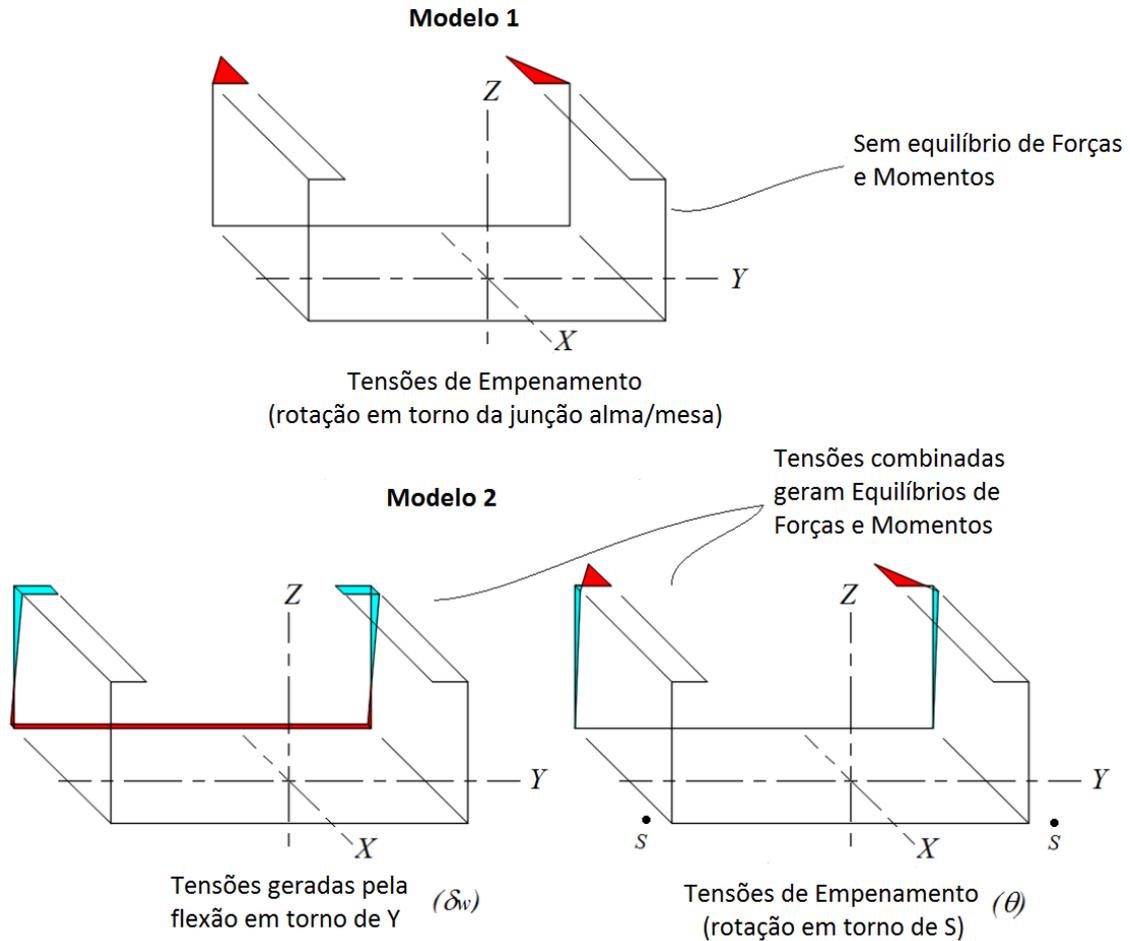
$$L_{cr} = b_w \left(1 + 4\pi^2 \frac{EI_w}{Db_w^3}\right)^{1/4} \quad (11)$$

## 2.1 Modelo 2

As tensões de empenamento no flange e no enrijecedor para o Modelo 1 são apresentados na figura 4, verifica-se que para essa configuração não há equilíbrio de forças e nem de momentos na seção. Ao considerar a rotação do conjunto mesa+enrijecedor em torno do ponto S, distante  $Y_S$  da junção mesa/alma, e uma flexão da coluna em torno do eixo de menor inércia, os equilíbrios podem ser alcançados, conforme pode ser observado na mesma figura 4. A parcela de flexão  $\delta_w$  pode ser escrita como:

$$\delta_w(x) = \delta \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (12)$$

Sendo  $\delta$  a amplitude da deflexão.



**Figura 4: Tensões normais nos Modelos 1 e 2.**

Através do equilíbrio de forças geradas pelas tensões de empenamento na direção X, a expressão 13 para  $Y_s$  pode ser obtida. Pelo equilíbrio de momentos em Y, a amplitude da parcela de flexão  $\delta$  pode ser obtida pela equação 14, relacionada com a amplitude de rotação  $\alpha$ .

$$Y_s = \frac{b_s^2}{b_f + 2b_s} \quad (13)$$

$$\delta = \beta\alpha = \left( \frac{3b_f b_s^2 + 3b_s^2 b_w}{b_f^2 + 4b_f b_s + 2b_f b_w + 6b_s b_w} - Y_s \right) \alpha \quad (14)$$

Seguindo o mesmo desenvolvimento do Modelo 1 (as funções de deslocamentos  $w(x,y)$  e  $\theta(x)$  não se alteram), as expressões obtidas para a tensão crítica  $\sigma_{cr,d}$  e o comprimento crítico de flambagem  $L$  do Modelo 2 são:

\* Contribuição tecnocientífica ao **Construmetal 2016** – Congresso Latino-americano da Construção Metálica – 20 a 22 de setembro de 2016, São Paulo, SP, Brasil.

$$\sigma_{cr,d} = \frac{\frac{Db_w}{4} \left[ \left( \frac{L}{b_w} \right) + \left( \frac{b_w}{L} \right) \right]^2 + \frac{\pi^2}{L^2} E \left( I_w + \frac{\beta^2 I_{yy}}{2} \right) + GJ}{(Y_s + \beta)^2 (A/2) + (Y_s + \beta) (b_s^2 + 2b_w^2 / \pi^2) t + I_0 + b_w^3 t / (4\pi^2)} \quad (15)$$

$$L = \left( \frac{b_w}{D} \right)^{1/4} \left( Db_w^3 + 4\pi^2 EI_w + 2\pi^2 \beta^2 EI_{yy} \right)^{1/4} \quad (16)$$

A é a área da seção transversal e  $\beta$  é o coeficiente que correlaciona as amplitudes de flexão e de rotação, dado pela equação 14.

### 3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os resultados de comprimentos e tensões críticas calculadas pelos Modelos 1 e 2 de acordo com as expressões 10, 11, 15 e 16 são apresentados e comparados com os valores obtidos com auxílio do programa computacional GBTUL (Bebiano *et al.* [19]), software livre que utiliza a formulação da GBT para análise de flambagem de PFFs. Na análise de estabilidade elástica do GBTUL, foi necessário desativar alguns modos de flambagem (na figura 5, apenas os modos 5 e 6 são distorcionais) para a obtenção de resultados correspondentes ao modo distorcional “puro”, de acordo com a formulação desse trabalho.

Foram analisadas 62 seções comerciais ‘U enrijecido’ considerando-se material com módulo de elasticidade  $E=200$  GPa e  $\nu=0,3$ . As geometrias das seções analisadas bem como os resultados obtidos pelos Modelos 1 e 2 e o GBTUL são apresentados na tabela 2.

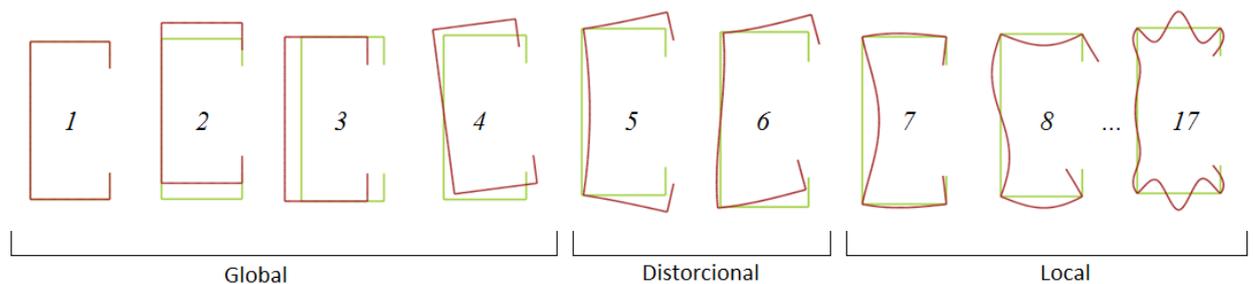


Figura 5: Modos de flambagem adotados com auxílio do programa computacional GBTUL.

Tabela 2: Geometrias e Resultados para Seções Comerciais Analisadas (dimensões em milímetros; tensões em MPa)

Geometria das Seções					GBTUL		Modelo 1			Modelo 2		
$b_w \times b_f \times b_s$	t	$b_w/t$	$b_f/b_w$	$b_s/b_f$	$L_{cr,GBTUL}$	$\sigma_{cr,d,GBTUL}$	$L_{cr}$	$\sigma_{cr,d}$	$\sigma_{cr,d}/\sigma_{cr,d,GBTUL}$	$L_{cr}$	$\sigma_{cr,d}$	$\sigma_{cr,d}/\sigma_{cr,d,GBTUL}$
50 x 25 x 10	1,52	32,9	0,50	0,20	210	947	210	1459	1,54	187	1029	1,09
	1,90	26,3	0,50	0,20	190	1244	188	1890	1,52	168	1344	1,08
	2,28	21,9	0,50	0,20	170	1566	172	2349	1,50	153	1683	1,07
	2,66	18,8	0,50	0,20	160	1914	159	2834	1,48	142	2045	1,07
	3,04	16,4	0,50	0,20	150	2287	149	3348	1,46	133	2430	1,06
75 x 40 x 15	1,52	49,3	0,53	0,20	400	558	399	869	1,56	357	624	1,12
	1,90	39,5	0,53	0,20	360	722	357	1113	1,54	319	803	1,11

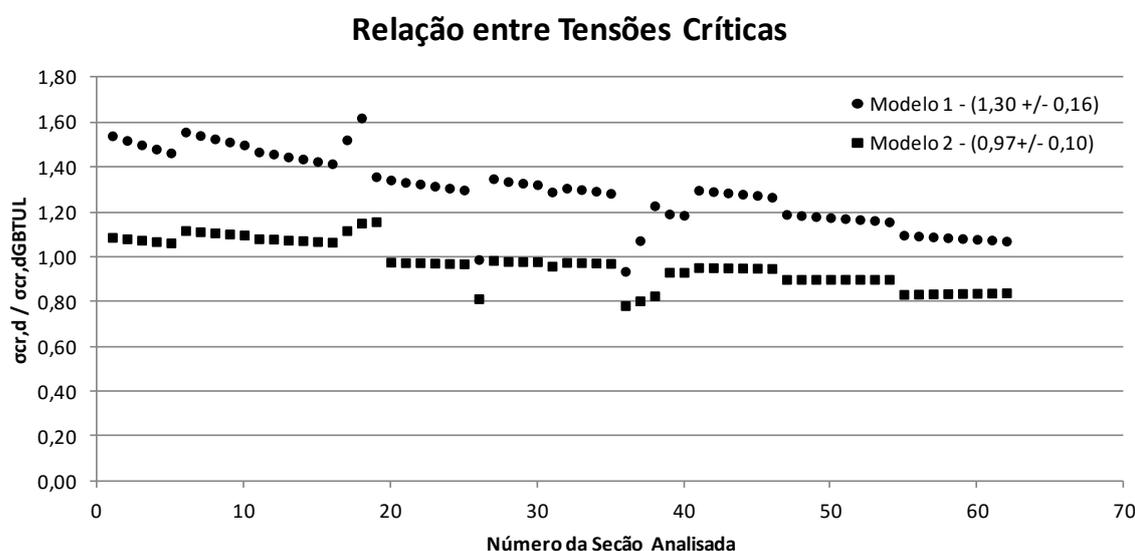
\* Contribuição tecnológica ao **Construmetal 2016** – Congresso Latino-americano da Construção Metálica – 20 a 22 de setembro de 2016, São Paulo, SP, Brasil.

	2,28	32,9	0,53	0,20	330	896	326	1368	1,53	292	992	1,11
	2,66	28,2	0,53	0,20	300	1080	301	1633	1,51	270	1190	1,10
	3,04	24,7	0,53	0,20	280	1274	282	1910	1,50	253	1399	1,10
100 x 50 x 17	1,52	65,8	0,50	0,17	530	396	526	581	1,47	475	428	1,08
	1,90	52,6	0,50	0,17	470	510	470	744	1,46	425	550	1,08
	2,28	43,9	0,50	0,17	430	632	430	914	1,45	388	679	1,07
	2,66	37,6	0,50	0,17	400	759	398	1090	1,44	359	814	1,07
	3,04	32,9	0,50	0,17	370	894	372	1274	1,43	336	955	1,07
	3,42	29,2	0,50	0,17	350	1035	351	1465	1,42	317	1103	1,07
100 x 55 x 20	3,00	33,3	0,55	0,20	450	857	444	1304	1,52	399	957	1,12
100 x 60 x 25	5,00	20,0	0,60	0,25	420	1570	424	2543	1,62	377	1807	1,15
100 x 70 x 15	3,00	33,3	0,70	0,15	430	557	403	756	1,36	376	644	1,16
127 x 50 x 17	1,52	83,6	0,39	0,13	550	317	558	426	1,34	504	310	0,98
	1,90	66,8	0,39	0,13	490	411	500	548	1,33	451	400	0,97
	2,28	55,7	0,39	0,13	450	510	456	676	1,33	412	497	0,97
	2,66	47,7	0,39	0,13	420	616	423	810	1,32	382	599	0,97
	3,04	41,8	0,39	0,13	390	728	396	951	1,31	357	707	0,97
	3,42	37,1	0,39	0,13	370	846	373	1098	1,30	337	820	0,97
150 x 40 x 10	2,00	75,0	0,27	0,07	310	279	309	276	0,99	286	227	0,81
150 x 60 x 20	1,52	98,7	0,40	0,13	710	259	720	349	1,35	651	255	0,98
	1,90	78,9	0,40	0,13	640	335	644	448	1,34	582	328	0,98
	2,28	65,8	0,40	0,13	580	414	588	550	1,33	532	405	0,98
	2,66	56,4	0,40	0,13	540	497	545	657	1,32	493	486	0,98
	3,04	49,3	0,40	0,13	510	596	510	769	1,29	461	571	0,96
	3,42	43,9	0,40	0,13	480	677	481	885	1,31	435	660	0,98
	3,80	39,5	0,40	0,13	450	773	457	1005	1,30	413	753	0,97
	4,18	35,9	0,40	0,13	430	874	436	1130	1,29	394	850	0,97
	4,76	31,5	0,40	0,13	410	1036	409	1330	1,28	370	1006	0,97
180 x 40 x 10	2,00	90,0	0,22	0,06	325	193	327	180	0,94	303	151	0,78
180 x 40 x 15	3,00	60,0	0,22	0,08	346	415	359	445	1,07	323	334	0,80
180 x 40 x 20	4,00	45,0	0,22	0,11	362	684	384	839	1,23	338	565	0,83
200 x 75 x 20	1,90	105,3	0,38	0,10	778	210	775	250	1,19	711	195	0,93
	2,28	87,7	0,38	0,10	710	260	707	308	1,19	649	242	0,93
200 x 75 x 25	2,66	75,2	0,38	0,13	765	355	774	460	1,30	699	338	0,95
	3,04	65,8	0,38	0,13	715	416	724	537	1,29	654	396	0,95
	3,42	58,5	0,38	0,13	675	479	683	616	1,29	617	456	0,95
	3,80	52,6	0,38	0,13	641	545	648	698	1,28	586	518	0,95
	4,18	47,8	0,38	0,13	612	614	618	782	1,27	559	583	0,95
	4,76	42,0	0,38	0,13	574	724	580	917	1,27	525	687	0,95
250 x 85 x 25	1,90	131,6	0,34	0,10	1022	170	1030	202	1,19	939	153	0,90
	2,28	109,6	0,34	0,10	934	210	941	248	1,18	858	189	0,90
	2,66	94,0	0,34	0,10	865	251	872	296	1,18	794	226	0,90
	3,04	82,2	0,34	0,10	811	295	816	347	1,18	744	265	0,90
	3,42	73,1	0,34	0,10	765	341	770	399	1,17	702	306	0,90
	3,80	65,8	0,34	0,10	726	388	731	453	1,17	666	349	0,90
	4,18	59,8	0,34	0,10	694	438	697	509	1,16	636	394	0,90
	4,76	52,5	0,34	0,10	651	518	654	599	1,16	597	466	0,90
300 x 85 x 25	1,90	157,9	0,28	0,08	1063	126	1079	138	1,10	983	105	0,83
	2,28	131,6	0,28	0,08	971	156	986	170	1,09	898	130	0,83
	2,66	112,8	0,28	0,08	900	188	913	204	1,09	833	157	0,83
	3,04	98,7	0,28	0,08	844	221	855	240	1,09	780	185	0,84
	3,42	87,7	0,28	0,08	796	256	807	277	1,08	736	214	0,84
	3,80	78,9	0,28	0,08	757	293	766	316	1,08	700	245	0,84
	4,18	71,8	0,28	0,08	722	331	732	356	1,08	668	278	0,84
	4,76	63,0	0,28	0,08	679	394	687	421	1,07	628	331	0,84

\* Contribuição tecnocientífica ao **Construmetal 2016** – Congresso Latino-americano da Construção Metálica – 20 a 22 de setembro de 2016, São Paulo, SP, Brasil.

Alguns comentários sobre os resultados podem ser apresentados: (i) o Modelo 1 apresentou resultados para os comprimentos críticos mais próximos do GBTUL, com uma média para a relação  $L_{cr,d}/L_{cr,dGBTUL}$  de  $(1,01 \pm 0,01)$ , se comparado com os resultados obtidos pelo Modelo 2, com uma média de  $(0,92 \pm 0,01)$ ; (ii) o Modelo 1 apresentou as maiores diferenças para as tensões críticas comparadas com as obtidas pelo GBTUL, chegando a uma diferença máxima de +62%, enquanto para o Modelo 2, as máximas diferenças encontradas foram de  $\pm 16\%$ ; (iii) a relação geométrica  $b_w/t$  parece ser a de menor influência na tensão crítica do modo distorcional, pois para seções com mesmas dimensões  $b_w$ ,  $b_f$  e  $b_s$ , variando apenas a espessura  $t$ , as máximas diferenças para as tensões críticas das seções chegam a 8%; (iv) para seções com relações  $b_f/b_w > 0,4$  e  $b_s/b_f > 0,13$ , os resultados do Modelo 2 para tensão crítica foram sempre superiores aos do GBTUL, e inferiores nos casos em que essas relações geométricas não são respeitadas; (v) seções com  $b_f/b_w=0,4$  e  $b_s/b_f=0,13$  resultaram em tensões críticas no modo distorcional calculadas pelo Modelo 2 com melhor índice de concordância em relação os resultados originados do GBTUL.

A figura 6 apresenta graficamente os resultados da relação  $\sigma_{cr,d}/\sigma_{cr,dGBTUL}$  para cada modelo analisado (conforme tabela 2). Para o Modelo 1, a relação apresentou uma média de 1,30 com desvio padrão de 0,16. Já para o Modelo 2, a relação entre as tensões críticas calculadas e aquelas obtidas com o programa de análise GBTUL resultou em uma média de 0,97 com desvio padrão de 0,10.



**Figura 6: Relação  $\sigma_{cr,d}/\sigma_{cr,dGBTUL}$  de cada Modelo de análise para as seções indicadas na tabela 2.**

#### 4. CONCLUSÕES

Nesse trabalho, foi apresentado um método simples e razoavelmente preciso para estimar as tensões e comprimentos críticos de flambagem distorcional em colunas de perfil 'U enrijecido' submetidas à compressão axial. Nesse desenvolvimento, foi empregado o Método do Quociente de Rayleigh e as expressões obtidas por dois modelos distintos foram aplicadas a 62

seções comerciais. Os resultados do cálculo direto, segundo os Modelos 1 e 2, foram comparados com aqueles obtidos com auxílio do programa computacional GBTUL de análise de flambagem. As tensões críticas calculadas pelo modelo mais refinado, o Modelo 2, apresentaram uma média de  $(0,97 \pm 0,10)$  quando comparadas com os valores do GBTUL.

Alguns fatores podem explicar as diferenças encontradas entre o método proposto e os resultados pela GBT: (i) as deformações por flexão no flange e no enrijecedor foram desprezadas no presente trabalho e (ii) a deformação por flexão da alma foi aproximada por uma função dupla de senos. Para tentar aprimorar o método, funções de deslocamentos refinadas estão sendo estudadas pelos autores.

### Agradecimentos

Esse trabalho contou com o apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

### REFERÊNCIAS

1. Lau, S.C.W., Hancock, G.J. Distortional Buckling Formulas for Channel Columns. *Journal of Structural Engineering*. 1987; 113 (5): 1063-1078.
2. Schafer, B.W. Cold-Formed Steel Behaviour and Design: Analytical and Numerical Modeling of Elements and Members with Longitudinal Stiffeners [Ph.D. Thesis]. Ithaca, New York: Cornell University; 1997.
3. Teng, J.G., Yao, J., Zhao, Y. Distortional Buckling of Channel Beam-columns. *Thin-Walled Structures*. 2003; 41(7): 595-617.
4. Silvestre, N., Camotim, D. Distortional Buckling formulae for cold-formed steel C and Z-sections members: Part I- derivation. *Thin-Walled Structures*. 2004; 42(11): 1567-1597.
5. Zhou, X., Liu, Z., He, Z. General Distortional Buckling Formulae for both Fixed-ended and Pinned-ended C-section columns. *Thin-Walled Structures*. 2015; 94(9): 603-611.
6. ABNT, Associação Brasileira de Normas Técnicas NBR 14762 – Dimensionamento de Estruturas de Aço Constituídas por Perfis Formados a Frio, 2010.
7. Schafer, B.W., Ádány, S. Buckling analysis of cold-formed steel members using CUFSM: conventional and constrained finite strip methods. 18<sup>th</sup> International Specialty Conference on Cold-formed Steel Structures. Orlando, Florida, USA, October 26-27, 2006.
8. Schardt, R. Generalized Beam Theory – An Adequate Method for Coupled Stability Problems. *Thin-Walled Structures*. 1994; 19(2-4): 161-180.
9. Batista, E.M. Effective section method: A general direct method for the design of steel cold-formed members under local-global interaction. *Thin-Walled Structures*. 2010, 48: 345-356.

---

\* Contribuição técnica ao **Construmetal 2016** – Congresso Latino-americano da Construção Metálica – 20 a 22 de setembro de 2016, São Paulo, SP, Brasil.

10. Australian/New Zealand Standard – Cold-Formed Steel Structures, 2005.
11. Cardoso, D.C.T., Harries, K.A., Batista, E.M. Closed-Form Equations for Local Buckling of Pultruded Thin-Walled Sections. *Thin-Walled Structures*. 2014; 79(6): 16-22.
12. Schafer, B.W. Distortional Buckling of Cold-formed Steel Columns. Final Report, Project Sponsored by the American Iron and Steel Institute, 2000.
13. Vazquez, E.G. Análise Teórica e Experimental da Instabilidade Torcional de Perfis Formados a Frio sob Compressão Centrada [Tese de D. Sc.]. Rio de Janeiro: COPPE/UFRJ; 2002.
14. Sharp, M.L. Longitudinal Stiffeners for Compression Members. *Journal of Structural Division*. 1966; 92(5): 187-212.
15. Li, L., Chen, J. An analytical model for analysing distortional buckling of cold-formed steel sections. *Thin-Walled Structures*. 2008; 46(12): 1430-1436.
16. Hancock, G.J. Design for distortional buckling of flexural members. *Thin-Walled Structures*. 1997; 27(1): 3-12.
17. Silvestre, N., Camotim, D. Distortional Buckling formulae for cold-formed steel C and Z-sections members: Part II- validation and application. *Thin-Walled Structures*. 2004; 42(11): 1599-1629.
18. Bazant, Z.P., Cedolin, L. *Stability of Structures: elastic, inelastic, fracture and damage theories*. New York: Oxford University; 1991.
19. Bebiano, R., Pina, P., Silvestre, N., Camotim, D. GBTUL-buckling and vibration analysis of thin-walled members. DECivil/IST, Technical University of Lisbon, 2008.